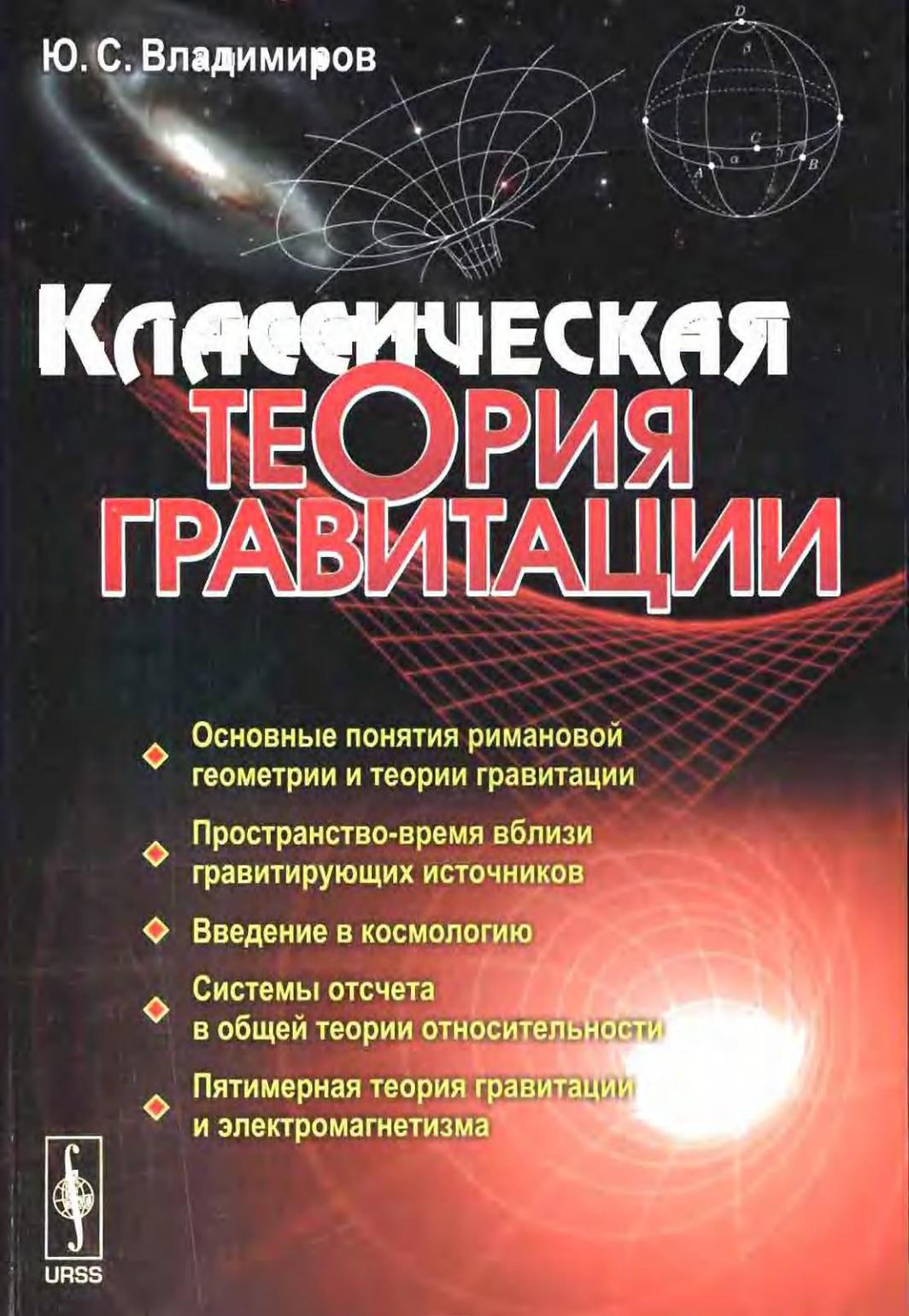


Ю. С. Владимиров



Классическая ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ

- ◆ Основные понятия римановой геометрии и теории гравитации
- ◆ Пространство-время вблизи гравитирующих источников
- ◆ Введение в космологию
- ◆ Системы отсчета в общей теории относительности
- ◆ Пятимерная теория гравитации и электромагнетизма



URSS

Ю. С. Владимиров

КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ

Рекомендовано

УМО по классическому университетскому
образованию РФ в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по специальности
010701.65 «Физика»



URSS
МОСКВА

Владимиров Юрий Сергеевич

Классическая теория гравитации: Учебное пособие. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. — 264 с.

Книга представляет собой курс лекций по классической теории гравитации (общей теории относительности). В первой части излагаются основные понятия, содержание и главные следствия общей теории относительности (ОТО). Во второй части книги рассматривается теория систем отсчета, необходимая для раскрытия и осмысления ОТО в возможно более полном объеме, а также применение монадного метода для анализа проблем ОТО и для описания 5-мерной теории гравитации и электромагнетизма.

Книга адресована студентам, аспирантам и преподавателям вузов физико-математического профиля, физикам-теоретикам, а также всем, кто интересуется геометрическим подходом к описанию физики.

Рецензент:

президент Российского гравитационного общества,
д-р физ.-мат. наук, проф. В. Н. Мельников

Издательство «Книжный дом «ЛИБРОКОМ»».

117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 9.

Формат 60×90/16. Печ. л. 16,5. Бумага офсетная. Зак. № 2606.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».

117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 11А, стр. 11.

ISBN 978-5-397-00884-6

© Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА	
	E-mail: URSS@URSS.ru
	Каталог изданий в Интернете: http://URSS.ru
	Тел./факс: 7 (499) 135-42-16
	URSS Тел./факс: 7 (499) 135-42-46

7212 ID 101926



Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещенные в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельца.

Оглавление

Предисловие	8
Введение	11
§ 1. Истоки неевклидовой геометрии	11
§ 2. Идеи, предшествовавшие созданию общей теории относительности	15
§ 3. Направления современных исследований в теории гравитации	22
 Часть I	
Начала классической теории гравитации	25
Глава 1. Основные понятия римановой геометрии и теории гравитации	25
§ 1.1. Группа допустимых координатных преобразований и тензоры	25
1.1.1. Координатные системы	25
1.1.2. Основы тензорной алгебры	29
§ 1.2. Метрический тензор	32
1.2.1. Обобщения теоремы Пифагора	33
1.2.2. Метрический тензор и его свойства	35
1.2.3. Концептуальные вопросы введения метрики	39
§ 1.3. Уравнения геодезических линий и ковариантное дифференцирование	41
1.3.1. Уравнения геодезических линий и символы Кристоффеля	41
1.3.2. Анализ уравнений геодезических линий	43
1.3.3. Трансформационные свойства символов Кристоффеля	45
1.3.4. Ковариантные производные	46

§ 1.4.	Тензор кривизны и его свойства	48
1.4.1.	Тензор кривизны	49
1.4.2.	Дополнения к свойствам тензора кривизны	51
1.4.3.	Конформное соответствие и тензор Вейля	52
§ 1.5.	Уравнения Эйнштейна, Максвелла и Клейна—Фока	54
1.5.1.	Уравнения Эйнштейна	55
1.5.2.	Уравнения Максвелла	58
1.5.3.	Уравнение Клейна—Фока	60
1.5.4.	Объединение уравнений Эйнштейна, Максвелла и Клейна—Фока в рамках 5-мерия (предварительные замечания)	61
§ 1.6.	Параллельный перенос и геометрии Схоутена	64
1.6.1.	Параллельный перенос	64
1.6.2.	Геометрии Схоутена и их применения в физике	69
Глава 2.	Пространство-время вблизи гравитирующих источников	74
§ 2.1.	Метрика Шварцшильда	74
2.1.1.	Уравнения Эйнштейна для сферически симметричной метрики	74
2.1.2.	Вывод решения Шварцшильда	78
2.1.3.	Анализ метрики Шварцшильда	79
§ 2.2.	Уравнения геодезических линий в метрике Шварцшильда	83
2.2.1.	Угловые и времени-подобная компоненты	83
2.2.2.	Радиальная компонента уравнений геодезических линий	85
§ 2.3.	Классические эффекты ОТО	87
2.3.1.	Смещение перигелия Меркурия	87
2.3.2.	Эффект отклонения лучей света	91
2.3.3.	Обсуждение классических эффектов ОТО	93
§ 2.4.	Метрика Керра	96
2.4.1.	Анализ метрики Керра	96
2.4.2.	Уравнения геодезических линий в метрике Керра	99
2.4.3.	Некоторые эффекты в метрике Керра	101

§ 2.5. «Частицеподобные» точные решения уравнений Эйнштейна	105
2.5.1. Некоторые обобщения метрики Шварцшильда	106
2.5.2. Обобщения метрики Керра	108
Глава 3. Введение в космологию	110
§ 3.1. Однородные изотропные пространства	110
3.1.1. Условия однородности и изотропии	110
3.1.2. Пространства постоянной кривизны	114
§ 3.2. Однородные изотропные модели Вселенной	117
3.2.1. Закрытая и открытые модели Фридмана	118
3.2.2. Модели Эйнштейна и де Ситтера	121
3.2.3. Возможные однородные изотропные модели Вселенной	123
§ 3.3. Космология и астрофизика	124
3.3.1. Космологическое красное смещение	125
3.3.2. Критическая плотность и возраст Вселенной	127

Часть II

Системы отсчета и их применение 129

Глава 4. Системы отсчета в общей теории относительности 129

§ 4.1. Общековариантный монадный метод	130
4.1.1. Понятие системы отсчета	130
4.1.2. Алгебра общековариантного монадного метода	132
4.1.3. Монадные физико-геометрические тензоры	135
4.1.4. Монадные операторы дифференцирования	136
§ 4.2. Метод хронометрических инвариантов	138
4.2.1. Алгебра метода хронометрических инвариантов	139
4.2.2. Физико-геометрические тензоры и операторы дифференцирования в хронометрической калибровке	142
§ 4.3. Метод кинеметрических инвариантов	144
4.3.1. Алгебра метода кинеметрических инвариантов	145

4.3.2. Физико-геометрические тензоры и операторы дифференцирования в кинеметрической калибровке	149
§ 4.4. Монадный вид ключевых уравнений	151
4.4.1. Уравнения геодезических линий	151
4.4.2. Уравнения Эйнштейна и тождества	153
4.4.3. Уравнения Максвелла в монадном виде	156
§ 4.5. Монадный метод в точных решениях уравнений Эйнштейна	158
4.5.1. Монадный метод в метриках Фридмана	159
4.5.2. Монадный метод в метрике Шварцшильда	162
4.5.3. Монадный метод в метрике Керра	165
Глава 5. Применение монадного метода для анализа проблем ОТО	168
§ 5.1. Законы сохранения в ОТО	168
5.1.1. Ситуация с законами сохранения энергии и импульса в ОТО	169
5.1.2. Производные Ли и монадный оператор временного дифференцирования	171
5.1.3. Векторы Киллинга и законы сохранения в ОТО	173
§ 5.2. Псевдотензорный подход к законам сохранения	176
5.2.1. Суть псевдотензорного подхода	176
5.2.2. Варианты псевдотензоров энергии-импульса	178
5.2.3. Несостоятельность псевдотензорного подхода	180
5.2.4. Монадные векторы энергии грави-инерциального поля	181
§ 5.3. Гравитационные волны в ОТО	185
5.3.1. Алгебраические критерии гравитационных волн	187
5.3.2. Референционный анализ грави-инерциальных волновых процессов	191
§ 5.4. Диадный метод	194
5.4.1. Общековариантный диадный метод	195
5.4.2. Кинорометрическая калибровка диадного метода	200

§ 5.5. Анализ волновых решений уравнений Эйнштейна	203
5.5.1. Анализ точных волновых решений	204
5.5.2. Слабые плоские гравитационные волны	207
§ 5.6. Воздействие грави-инерциальных волн на объекты	210
5.6.1. Поведение свободных пробных масс в слабой плоской грави-инерциальной волне	210
5.6.2. Воздействие грави-инерциальных волн на детектор	213
§ 5.7. Формулировки ОТО в монадном виде	218
5.7.1. Лагранжев формализм ОТО	219
5.7.2. Гамильтонова формулировка ОТО	221
5.7.3. Уравнения Эйнштейна как уравнения линий в суперпространстве Уилера—ДеВитта	224
5.7.4. ОТО в формализме Гамильтона—Якоби	226
Глава 6. Пятимерная теория гравитации и электромагнетизма	228
§ 6.1. Монадный метод в 5-мерной геометрии	228
6.1.1. Допустимость перехода к многомерной теории	229
6.1.2. Монадный метод редукции ((4 + 1)-расщепления)	231
6.1.3. Геометрические уравнения в монадном виде	234
§ 6.2. Пятимерная теория Калуцы	236
6.2.1. Переход от 5-мерной геометрии к электродинамике в ОТО	237
6.2.2. Вариант 5-мерной теории Калуцы—Клейна	240
6.2.3. Анализ критических замечаний по 5-мерной теории Калуцы	244
§ 6.3. Теория Калуцы со скаляризмом	248
6.3.1. Скаляризм в 5-мерной теории	248
6.3.2. Сферически-симметричное решение со скаляризмом	250
6.3.3. Возможные эффекты скаляризма	252
Заключение	254
Приложение	257
Литература	263

Предисловие

Содержание предлагаемой читателю книги представляет собой годовой цикл лекций по курсу «Классическая теория гравитации», которые в течение многих лет читаются студентам 4-го курса физического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, а также в Институте гравитации и космологии при Российском университете дружбы народов. Книга состоит из двух частей, соответствующих учебному плану первого и второго семестров.

Первая часть включает 3 главы, каждая из которых состоит из нескольких разделов (лекций). Общее число лекций, включая Введение, предназначенных для первого семестра, — 15.

В первой главе первой части книги излагаются основы римановой геометрии и принципы общей теории относительности. Здесь приводятся необходимые сведения о тензорном исчислении и вводятся ключевые понятия дифференциальной геометрии: метрика, параллельный перенос, ковариантное дифференцирование, уравнения геодезических линий, тензор кривизны — и, наконец, записываются уравнения Эйнштейна и уравнения Максвелла в искривленном пространстве-времени.

Во второй главе первой части рассматриваются наиболее важные точные решения уравнений Эйнштейна: сферически симметричное решение Шварцшильда, на основе которого описываются главные эффекты общей теории относительности, а также аксиально симметричная метрика Керра, создаваемая вращающимися массивными объектами. Здесь же приведены физически наиболее интересные обобщения этих метрик.

Третья глава является своего рода введением в современные представления о мире в целом, основывающиеся на точных однородных изотропных космологических решениях Фридмана. Дана также информация о некоторых других космологических моделях, в том числе и о первом космологическом решении Эйнштейна.

В первой части книги учтен материал лекций по общей теории относительности (ОТО), которые в 1950-е годы читал на физическом факультете МГУ профессор М. Ф. Широков, в свое время слушавший самого А. А. Фридмана. Разумеется, их содержание существенно переработано и дополнено с учетом последних работ по данной проблематике.

Одной из ведущих идей первой части была 4-мерная симметрия пространства-времени. А **вторая часть**, предназначенная для второго семестра, исходит из противоположной идеи, — $(1 + 3)$ -расщепления единого пространственно-временного многообразия на физически наблюдаемое время и 3-мерное пространственное сечение наблюдателя, что достигается посредством монадного метода задания систем отсчета.

Начальная (четвертая) глава этой части посвящена изложению монадного метода задания системы отсчета как в общековариантном виде, не зависящем от выбора координатной системы, так и в двух специальных групповых калибровках, где понятия системы отсчета и координатных систем связаны специальными условиями. Эти две калибровки монадного метода составляют теории хронометрических и кинеметрических инвариантов. Только при добавлении методов задания систем отсчета к материалу первой части книги общая теория относительности в полной мере может соответствовать своему названию.

В следующей (**пятой**) главе рассмотрены наиболее важные приложения монадного метода в общей теории относительности. Это, прежде всего, проблема законов сохранения в искривленном пространстве-времени. Здесь обсуждены суть и недостатки как псевдотензорного, так и монадного подходов к ее решению. Далее монадный и диадный методы применяются при анализе проблемы описания гравитационных и грави-инерциальных волн в ОТО. В последнем разделе приводятся формулировки общей теории относительности на основе монадного метода, развитые с целью ее подготовки к квантованию.

Наконец, в заключительной (**шестой**) главе книги монадный метод используется для корректного изложения и физической интерпретации 5-мерной геометрической модели объединения гравитации и электромагнетизма (теории Калуцы). Известно, что впер-

вые элементы монадного метода, или метода $(1 + 4)$ -расщепления, были введены именно в рамках 5-мерной теории для выделения из 5-мерных геометрических понятий электромагнитных величин. Затем, после уточнения в рамках метода $(1 + 3)$ -расщепления, он был вновь применен для строгой формулировки 5-мерной теории Калушы.

Вторая часть также состоит из трех глав, в совокупности насчитывающих 15 разделов (лекций). Представленный здесь материал базируется преимущественно на отечественных исследованиях в этой области. Результаты, полученные зарубежными авторами, переработаны в терминологии монадного метода.

Материал данного курса лекций допускает некоторые видоизменения, дополнения и перестановки. Например, можно помещать в иные разделы изложение конформных преобразований, дифференцирование Ли или классификацию Петрова пространств Эйнштейна. Предполагается постоянное обновление материала с учетом новых экспериментальных данных в ОТО, особенно в области релятивистской астрофизики.

В приложении приведены билеты для экзаменов или зачетов по данному курсу лекций, а также примерные темы курсовых работ.

Следует отметить, что представленный в книге лекционный материал нацелен на изложение лишь ключевых идей, принципов и следствий классической теории гравитации (общей теории относительности). Более подробное рассмотрение современной теории гравитации содержится в нашей книге «Геометрофизика» [5].

Автор выражает признательность ученикам, коллегам и слушателям лекций за внимание к данной проблематике, а также за вопросы и замечания, которые помогли в разработке данного курса лекций.

Введение

§ 1. Истоки неевклидовой геометрии

Идеологические предпосылки геометрического миропонимания были заложены в трудах Р. Декарта (1596–1650) и И. Канта (1724–1804), а физические (экспериментальные) — сложились после опытов Г. Галилея (1564–1642) с телами, падающими с Пизанской башни. Однако разработке соответствующей теории препятствовали укоренившиеся представления. Так, пространство считалось однородным (одинаковым во всех точках) и изотропным (одинаковым по всем направлениям), а время — однородным. Очевидность устоявшихся представлений о мире практически исключала саму возможность его обсуждения. А как же могло быть иначе! Оставалось только принимать пространство и время априорно заданными именно с такими свойствами, что и проявилось в философии Канта. Понадобились века (если не тысячелетия) для признания возможности более общих пространственно-временных многообразий, позволяющих включить в себя категорию полей переносчиков взаимодействий.

Истоки идеи об искривленности пространства (точнее, пространства-времени) фактически восходят к пятому постулату Евклида, казалось бы, не имеющему никакого отношения к физике и, тем более, к описанию полей переносчиков физических взаимодействий. Принципиально важным моментом здесь стал анализ логических основ евклидовой геометрии, которая трактовалась как единственно возможная, априорно заданная. Многие математики на протяжении более чем двух тысячелетий сомневались в необходимости этого постулата, пытались его доказать на основе остальных аксиом. Существует мнение, что и сам Евклид (III в. до н. э.) испытывал колебания, отнеся его в разряд постулатов. Иначе, чем объяснить, что материал в «Началах» состоит как бы из двух частей: теорем, которые доказываются без использования пятого постулата (абсолютная геометрия), и ряда теорем, опирающихся на пятый

постулат (собственно евклидова геометрия)? Видимо, сам Евклид пошел на этот шаг, потерпев неудачу в попытках доказательства пятого постулата.

Так или иначе, но в течение двух тысячелетий было принято множество попыток доказать пятый постулат. Из истории математики известно, что различные варианты доказательств предлагали: Посидоний (I в. до н. э.), Птолемей (II в. н. э.), Прокл (410–485), Насирэддин (1201–1274), Валлис (1616–1703), Саккери (1667–1733), Ламберт (1728–1777), Лежандр (1752–1833), Фаркаш Бояи (1775–1856) и многие другие. При внимательном рассмотрении предложенных доказательств выяснялось, что либо в них допускались логические ошибки, либо по ходу дела предполагалось как очевидное нечто такое, что было равносильно утверждению пятого постулата. Например, его формулировке эквивалентны следующие утверждения (см. рис. 1):

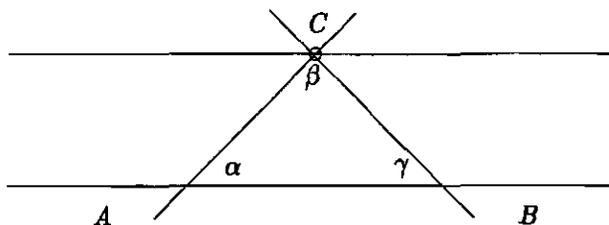


Рис. 1. Евклидова геометрия

«Через точку C , лежащую вне данной прямой AB , проходит только одна параллельная ей прямая», т. е. прямая, лежащая в одной плоскости с данной прямой и не пересекающая ее.

«Сумма углов любого плоского треугольника равна двум прямым углам, или 180° » и т. д. Можно привести большое число подобных равносильных утверждений.

Решение проблемы, стоявшей перед человечеством более двух тысячелетий, — выход за «геркулесовы столпы», — удалось найти лишь в первой трети XIX века. Этот важный шаг в развитии науки связан с именами Николая Ивановича Лобачевского (1792–1856), Карла Гаусса (1777–1855) и Яноша Бояи (1802–1860).

При некотором различии использованных методик, глубины и объема разработки проблемы суть сделанного открытия была одна, да и ход рассуждений был близким. Ставился вопрос: что будет, если отказаться от пятого постулата, т. е. предположить противное: пусть через одну точку C , лежащую вне данной прямой AB , проходит не одна, а две (а следовательно, и бесконечно много) параллельных ей прямых? Дальше задача состояла в построении геометрии с новой аксиомой. Расчет был прост. Если пятый постулат представлял собой теорему, то в геометрии с измененным утверждением рано или поздно должно встретиться противоречие, что и будет означать ложность сделанного допущения. Это и стало бы доказательством пятого постулата.

Однако, развивая такую геометрию, авторы не только не обнаружили каких-либо противоречий, но, наоборот, довольно быстро убедились, что перед ними разворачивается новая стройная геометрия с рядом интересных своеобразных свойств. Оказалось, что в новой геометрии сумма углов треугольников меньше 180° и эта величина зависит от линейных размеров треугольника. Кроме того, в теории возникает некий параметр с размерностью длины, а геометрические свойства систем зависят от отношения к нему их размеров, что приводит, в частности, к отсутствию подобных фигур. В малых областях новая геометрия практически совпадает с геометрией Евклида, но в больших — они отличаются. Лобачевский назвал свою геометрию «воображаемой» (или «пангеометрией») (см. [11, с. 11–17]), а Швейкарт — «звездной», или «астральной». Но дело не в названии, а в ее отличии от геометрии Евклида.

Несмотря на уверенность в своей правоте, Гауссу, Лобачевскому, Яношу Бояи и другим не удалось найти окончательного доказательства логической непротиворечивости построенной геометрии. Одно дело — отсутствие противоречий в геометрических построениях, даже продвинутых достаточно далеко, и их логическая стройность, и совершенно другое — доказательство их непротиворечивости в новой теории вообще. Окончательное подтверждение геометрия Лобачевского получила лишь в 70-х годах XIX века в работах итальянского геометра Эудженио Бельтрами (1835–1900) и немецкого математика Феликса Клейна (1849–1925). Основная идея предложенного доказательства состоит в том, чтобы

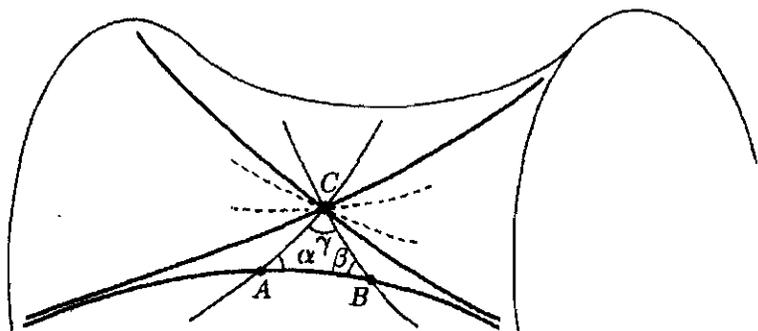


Рис. 2. Гиперболическая геометрия Лобачевского

свести неевклидову геометрию, впервые построенную как планиметрия, к геометрии на трехмерной гиперповерхности постоянной отрицательной кривизны (на трехмерном гиперboloиде) в четырехмерной геометрии Евклида. При этом нужно только заменить понятия прямых (кратчайших линий в мире Евклида) на геодезические линии (экстремальные кривые) на гиперповерхности. Тогда все утверждения относительно прямых в геометрии Лобачевского перейдут в соответствующие утверждения о свойствах таких линий на гиперboloиде.

Поскольку невозможно наглядно представить себе гиперболически искривленный трехмерный мир, это можно проиллюстрировать с помощью линий — гипербол на двухмерном гиперboloиде. Так, на рис. 2 пояснено обобщение пятого постулата Евклида. Через точку C , не лежащую на выбранной гиперболе AB , проходят две гиперболы, которые не пересекаются с AB . Следовательно, все другие гиперболы, обозначенные пунктирными линиями, не будут пересекать AB . На рис. 2 изображен треугольник, образованный пересечением трех гипербол. Легко понять, что сумма его углов $\alpha + \beta + \gamma < 180^\circ$.

В силу указанных причин первую неевклидову геометрию (геометрию Лобачевского) в литературе часто называют гиперболической. Содержащийся в геометрии Лобачевского параметр размерности длины имеет геометрический смысл кривизны трехмерного гиперboloида. Теперь легко понять зависимость свойств геометрических фигур от их размера.

§ 2. Идеи, предшествовавшие созданию общей теории относительности

Перечислим основные идеи, приведшие к созданию общей теории относительности (см. [2, 4, 11]).

1. Следующий существенный шаг в понимании геометрии пространства был сделан немецким математиком Бернгардом Риманом (1826–1866) в 1854 году¹⁾. Прежде всего, следует назвать открытый им второй вариант неевклидовой геометрии, или «геометрии Римана» в узком смысле. Фактически эта геометрия основана на третьей логической возможности при формулировке пятого постулата и постулата в геометрии Лобачевского, которую не заметили ни Лобачевский, ни Гаусс, ни Бояи. Она состоит в предположении, что через точку C , не лежащую на заданной прямой (геодезической линии) AB , нельзя провести ни одной прямой (геодезической линии), не пересекающей линию AB . Этот вариант неевклидовой геометрии соответствует геометрии на трехмерной гиперсфере в 4-мерном евклидовом пространстве. Самым существенным свойством такого трехмерного пространства является конечность его объема, так что, двигаясь все время в одном направлении, в конце концов можно вернуться в первоначальную точку. Вместо прямых линий евклидова пространства в сферической геометрии Римана выступают геодезические линии — дуги большого радиуса (см. рис. 3).

Из двумерной аналогии — геометрии на сфере — видно, что понятие параллельных линий, содержащееся в пятом постулате Евклида, в сферической геометрии вообще теряет всякий смысл, ибо любая дуга большого круга, проходящая через точку C , лежащую вне круговой линии AB , обязательно пересекает AB , притом в двух точках. Из рис. 3 также видно, что сумма углов треугольника ADB , образованного пересечением трех дуг большого круга, всегда больше 180° .

А. Эйнштейн писал: «Заслуга Римана в развитии идей о соотношении между геометрией и физикой двойка. Во-первых, он открыл

¹⁾ Следует обязательно ознакомиться с мемуаром Римана «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» [11, с. 18–33], не потерявшим актуальности до настоящего времени.

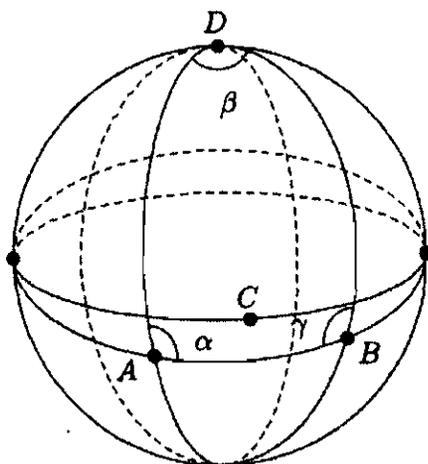


Рис. 3. Риманова сферическая геометрия

сферическую (эллиптическую) геометрию, которая является анти-тезой гиперболической геометрии Лобачевского. Таким образом, он впервые указал на возможность геометрического пространства конечной протяженности. Эта идея сразу была воспринята и привела к постановке вопроса о конечности физического пространства. Во-вторых, Риман имел смелость создать геометрии несравненно более общие, чем геометрия Евклида или неевклидовы геометрии в более узком смысле» [15, с. 181].

II. Существенный вклад в развитие идеи о связи физических свойств материи со свойствами искривленного пространства сделал английский математик Вильям Клиффорд (1845–1879). В вышедшей посмертно под редакцией К. Пирсона книге Клиффорда «Здравый смысл точных наук» (1885) четко поставлен вопрос о том, в каком пространстве мы живем: в бесконечном евклидовом или в замкнутом (конечном) сферическом пространстве Римана? В книге анализируются необычные закономерности замкнутого мира и приводится известный пример с ползающим по сфере жуком в качестве иллюстрации свойств замкнутого мира.

В частности, В. Клиффорд писал: «Спросим же себя, не можем ли мы подобным же образом рассматривать как изменения физического характера те действия, которые на самом деле обязаны

своим происхождением изменениям в кривизне нашего пространства. Не окажется ли, что все или некоторые из причин, которые мы называем физическими, свое начало ведут от геометрического строения нашего пространства» [11, с. 46]. Им же было высказано предположение, согласно которому такими физическими причинами могут быть теплота, свет, электрическое поле. Заметим, что истинная физическая причина искривленности — гравитация (как стало ясно после работ Эйнштейна) — им еще не названа. Однако высказанная Клиффордом гипотеза о возможной связи электромагнитного поля и геометрии пространства достаточна для признания его родоначальником идеи геометризации электромагнитного поля.

Но самое важное состоит в том, что В. Клиффорд фактически стал основателем геометрического миропонимания, причем в его экстремально законченной форме²⁾. Выдвигая программу полной геометризации всей материи, он, в частности, писал: «изменение кривизны пространства — это то, что в действительности происходит при том явлении, которое мы называем движением материи, как весомой, так и эфира; что в физическом мире не имеет места ничего, кроме этого изменения, подчиняющегося (возможно) закону непрерывности» [11, с. 36]. Именно в русле идей Клиффорда работал американский физик-теоретик Джон Уилер (1911–2008) и его последователи, провозгласившие программу построения «массы без массы», «заряда без заряда» и т. д., т. е. получения всех характеристик: материи из свойств «пустого» пространства (и времени) [11, с. 542–557].

III. Идеи неевклидовых геометрий даже в начале XX века представлялись экзотическими и были малоизвестными в сообществе физиков. Господствовала уверенность в евклидовом характере геометрии реального мира и в незыблемости закономерностей ньютоновой механики. Для формирования геометрического миропонимания необходимо было развенчать эти укоренившиеся представления. Сложившуюся ситуацию можно было сравнить с преодолением античных догм и физики Аристотеля (384–322 гг. до н. э.) благодаря трудам Н. Коперника (1473–1543), И. Келлера (1571–1630),

²⁾ Из воспоминаний современников Эйнштейна и сведений его биографов известно, что Эйнштейн был знаком с работами Клиффорда еще в бернский период своей жизни (1902–1909).

Г. Галилея и других выдающихся естествоиспытателей XV–XVII веков, подготовивших почву для создания ньютоновой механики.

На этот раз понадобилось значительно меньше времени. Большую роль в решении этой задачи и в подготовке условий для создания общей теории относительности сыграл физик, естествоиспытатель и философ Эрнст Мах (1838–1916) (см. [11, с. 49–100]). Сам Эйнштейн отмечал, что «Мах ясно понимал слабые стороны классической механики и был недалек от того, чтобы прийти к общей теории относительности. И это за полвека до ее создания! Весьма вероятно, что Мах сумел бы создать общую теорию относительности, если бы в то время, когда он еще был молод духом, физиков волновал вопрос о том, как следует понимать скорость света» [16, с. 29].

Уже в 1903 году, в самом преддверии создания теории относительности, Мах опубликовал статью «Пространство и геометрия с точки зрения естествознания», в которой проанализировал математические и физические аспекты развития представлений о геометрии пространства и подробно и обстоятельно охарактеризовал достижения Н. И. Лобачевского, К. Гаусса, Я. Бояи, Б. Римана и других. При этом он исходил из того, что «геометрия есть применение математики к опыту относительно пространства». Здесь же он написал пророческие слова: «Все развитие, приведшее к перевороту в понимании геометрии, следует признать за здоровое и сильное движение. Подготавливаемое столетиями, значительно усилившееся в наши дни, оно никоим образом не может считаться уже законченным. Напротив, следует ожидать, что движение это принесет еще богатейшие плоды — и именно в смысле теории познания — не только для математики и геометрии, но и для других наук. Будучи обязано, правда, мощным толчкам некоторых отдельных выдающихся людей, оно, однако, возникло не из индивидуальных, но общих потребностей! Это видно уже из одного разнообразия профессий людей, которые приняли участие в движении. Не только математики, но и философы, и дидактики внесли свою долю в эти исследования. И пути, проложенные различными исследователями, близко соприкасаются» [11, с. 82].

Знаменательно, что Эйнштейн на пике своей научной деятельности находился под большим влиянием идей Маха. И создавая общую теорию относительности, он был в полной уверенности, что

работает над реализацией его идей. Известно также, что Эйнштейн редко кого-либо цитировал, а ссылки на Маха содержатся в большинстве его работ того периода.

IV. Как вскоре стало ясно, ни Клиффорд, ни Мах не смогли бы создать общую теорию относительности, опираясь лишь на искривленное 3-мерное пространство. Это стало возможным, начиная с размерности четыре. Поэтому следующим важным этапом в создании общей теории относительности и всего геометрического миропонимания следует считать объединение 3-мерного пространства со временем в единое 4-мерное пространственно-временное многообразие, что было сделано в специальной теории относительности в 1905–1906 годах. Этот этап связан с именами Х. А. Лоренца (1853–1928), А. Эйнштейна (1879–1955), А. Пуанкаре (1854–1912), Г. Минковского (1864–1909). Так, Герман Минковский, выступая в 1908 году на 80-м собрании немецких естествоиспытателей и врачей в Кёльне, заявил: «Милостивые господа! Воззрения на пространство и время, которые я намерен перед вами развить, возникли на экспериментально-физической основе. В этом их сила. Их тенденция радикальна. Отныне пространство само по себе и время само по себе должны обратиться в фикции и лишь некоторый вид соединения обоих должен сохранить самостоятельность» [5, с. 71].

V. До сих пор речь шла о геометрических идеях, о логических основаниях, которые привели к созданию общей теории относительности. Однако с давних времен имелись достаточно серьезные опытные данные, осмысление которых могло подсказать идею об искривленности пространства (-времени). Так, уже после экспериментов Галилея с телами, падающими с Пизанской башни, стало известно, что все тела в поле тяжести Земли падают одинаково независимо от их индивидуальных свойств (массы, вещества, формы и т. д.). Затем это наблюдение нашло свое воплощение в законах механики Ньютона и в законе всемирного тяготения. Напомним, из второго закона Ньютона для падающих тел в гравитационном поле Земли следует

$$gm = G \frac{mM}{R^2} \rightarrow g = G \frac{M}{R^2}, \quad (2.1)$$

где m — масса тела, M — масса Земли, R — расстояние до центра Земли. Следовательно, уже тогда напрашивался вывод, согласно которому приобретаемое телами ускорение g зависит лишь от той точки пространства (от расстояния R), где они оказались. Уже можно было поставить вопрос: нельзя ли характеристику притяжения (получаемое телами ускорение) связать не с самими телами, а с соответствующим местом пространства, где они находятся? Заметим, что эта идея была созвучна еще не забытым тогда взглядам Аристотеля, наделявшего не только тела, но и места некими динамическими свойствами. Напомним его слова: «Перемещения простых физических тел, например, огня, земли и подобных им, показывают, что место есть не только нечто, но что оно имеет и какую-то силу».

Но как можно было реализовать эту идею в рамках представлений об евклидовом пространстве или даже о плоском пространстве-времени Минковского, чрезвычайно бедным по своим свойствам? Пространство однородно, т. е. одинаково во всех точках, и изотропно — одинаково по всем направлениям. Реализация этой идеи стала реальной лишь после освоения физиками идеи искривленности пространства (и времени), когда появились представления о пространстве, по-разному искривленном в различных местах. Ускорение можно связать с характеристиками искривленности пространства, а линии, по которым движутся тела, приобретают характер универсальных кривых в пространстве (времени). Последние можно отождествить с экстремальными линиями — геодезическими. Эта идея и была реализована в общей теории относительности Эйнштейна.

Следует остановиться на вопросе о смысле массы тела в (2.1). С одной стороны, массу можно определить, измеряя силу притяжения данного тела к некоторому эталону. Полученная таким образом величина характеризует гравитационный заряд тела — его способность притягиваться к другому телу. Эта так называемая *гравитационная (тяжелая) масса* m_{gr} записана в правой части уравнения (2.1). С другой стороны, массу можно определить из второго закона Ньютона, измеряя ускорение, которое приобретает тело под действием заданной эталонной силы. Получаемая таким образом величина характеризует инертные свойства тела — способность тела сохранять свою скорость. Данную величину, стоящую в левой части (2.1), называют *инертной массой* m_{in} . Эти две массы сокращены

слева и справа фактически на основании постулата об их равенстве. Вообще говоря, достаточно факта пропорциональности масс с неким универсальным коэффициентом пропорциональности, который можно включить в определение гравитационной постоянной G и в дальнейшем уже говорить о равенстве двух типов масс. Факт равенства масс был назван Эйнштейном *принципом эквивалентности*.

Исходя из изложенного, очевидно, что следующим важным шагом на пути к созданию общей теории относительности должна была стать увязка идеи об искривленности пространства-времени с гравитацией, что было сделано вскоре после создания специальной теории относительности. Так, в статье А. Пуанкаре 1906 года «О динамике электрона» (см. [11, с. 85–100]) уже наряду с электромагнитным было проанализировано и гравитационное взаимодействие в рамках специальной теории относительности, т. е. гравитация была поставлена рядом со свойствами пространства-времени. Вскоре к обсуждению этого вопроса присоединился и Альберт Эйнштейн, опубликовавший в 1907 году статью «О принципе относительности и его следствиях» [14, с. 65–114], где, во-первых, тяготение рассматривалось с учетом принципа относительности и, во-вторых, отмечалась связь гравитации с силами инерции в ускоренных системах отсчета, т. е. учитывался принцип эквивалентности.

VI. В результате описанной цепочки идей ко второму десятилетию XX века сложились все условия для создания общей теории относительности. Здесь чрезвычайно существенной оказалась опубликованная в 1913 году совместная статья А. Эйнштейна с математиком Марселем Гроссманом (1878–1936) «Проект обобщенной теории относительности и теории тяготения» [14, с. 227–266], где был сделан важный вывод: гравитационное взаимодействие обусловлено искривленностью 4-мерного пространства-времени. Из этой статьи очевидно, что А. Эйнштейн искал математический аппарат, позволяющий связать гравитацию с геометрией, но в тот момент не располагал необходимыми знаниями в области уже развитой к тому времени римановой геометрии. Освоить нужную математику ему помог М. Гроссман, с которым он дружил со студенческих лет. После выхода в свет этой статьи самое главное было сделано, все остальное, можно сказать, представляло собой техническую (математическую) часть формирования теории, завершен-

ную на рубеже 1915 и 1916 годов, когда почти одновременно А. Эйнштейном и Давидом Гильбертом (1862–1943) были записаны уравнения (Эйнштейна) для гравитационного поля (см. [11, с. 133–145], [14, с. 448–451]).

§ 3. Направления современных исследований в теории гравитации

Современная теория гравитации образует достаточно обширную область фундаментальной физики, которая предстает на отечественных и зарубежных гравитационных конференциях в виде нескольких направлений. Кратко охарактеризуем их.

I. Классическая теория гравитации составляет ядро всех исследований и включает в себя блок ключевых понятий и представлений геометрического подхода к физике. Здесь рассматриваются следующие вопросы:

- поиск и анализ точных решений уравнений Эйнштейна;
- развитие методов задания систем отсчета и их применение;
- исследование уравнений движения объектов в искривленном пространстве-времени;
- описание классических негравитационных полей в общей теории относительности;
- анализ проблем, связанных с законами сохранения;
- описание сплошных сред, термодинамики и статистической физики в искривленном пространстве-времени.

Можно назвать и ряд других задач и проблем.

II. Обобщенные теории гравитации в последнее время выделились в особый раздел исследований в силу практически исчерпанных возможностей теории, основанной на римановой 4-мерной геометрии, в рамках которой сформулирована ОТО. Поэтому интенсивно исследуются возможные следствия теории, опирающейся на более общие геометрии. Назовем следующие главные варианты обобщений:

- многомерные геометрические модели физических взаимодействий типа теорий Калуцы и Клейна;
- геометрии с кручением;

- геометрия Вейля (с сегментарной кривизной);
- финслеровы геометрии, основанные на различных обобщениях мероопределения;
- биметрические теории гравитации.

Этим далеко не исчерпываются все возможные варианты обобщений эйнштейновской теории гравитации.

III. Релятивистская астрофизика и космология в последнее время представляют особый интерес, поскольку этот круг проблем всегда имел принципиально важное значение и в рамках общей теории относительности впервые появилась возможность рассматривать мир (Вселенную) как целое. В настоящее время получен ряд важных экспериментальных результатов, заставивших заново продумывать основания наших представлений о мироздании. Среди рассматриваемых здесь проблем назовем следующие:

- вопросы происхождения Вселенной и ее эволюции;
- сингулярности в ОТО и гипотеза черных дыр;
- структура сверхплотных конфигураций;
- гипотезы темной материи и темной энергии.

Можно назвать и ряд других проблем и обсуждаемых гипотез.

IV. Квантование гравитации и связь теории гравитации с физикой микромира. Важность этого направления исследований очевидна. Здесь следует выделить следующие проблемы:

- поиск возможностей совмещения принципов общей теории относительности и квантовой теории;
- расчет ожидаемых эффектов квантования гравитации;
- анализ квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени;
- построение и анализ квантовых космологических моделей;
- квантование пространства-времени.

Имеются и другие проблемы.

V. Гравитационный эксперимент включает два вида экспериментальных исследований:

- 1) поиск гравитационного излучения (обнаружения гравитационных волн);
- 2) проведение экспериментов в неволновой зоне.

Представленный перечень проблем и задач, исследуемых в современной теории гравитации, убедительно свидетельствует о невозможности сколько-нибудь подробно остановиться на каждой из них. Поэтому лекторы, читающие в вузах курсы по гравитации, руководствуются собственными представлениями о целесообразности знакомства студентов с тем или иным направлением. Но независимо от сделанного выбора лекционный курс обязательно содержит изложение основ общей теории относительности, в ходе которого, как правило, недостаточно учитывается материал, связанный с методами задания систем отсчета. Можно надеяться, что данная книга поможет устранить этот пробел.

Контрольные задания

1. Какие идеи на ваш взгляд, в наибольшей степени способствовали созданию общей теории относительности? Обоснуйте вашу точку зрения.
2. Какое из названных направлений исследований в современной теории гравитации, на ваш взгляд, представляет наибольший интерес? Обоснуйте свою позицию.

Часть I

Начала классической теории гравитации

Глава 1

Основные понятия римановой геометрии и теории гравитации

§ 1.1. Группа допустимых координатных преобразований и тензоры

В современной физике ключевую роль играют симметрии. Теория групп лежит в основе не только квантовой механики и физики микромира, но и определяет структуру и содержание теории относительности. В специальной теории относительности ключевую роль играет 10-параметрическая группа Пуанкаре (6-параметрическая группа Лоренца плюс 4-параметрическая группа трансляций), которая при переходе к общей теории относительности заменяется на группу допустимых координатных преобразований, диктующих формулировку всей теории в терминах тензорных величин и операторов, изменяемых в согласии с допустимыми координатными преобразованиями.

1.1.1. Координатные системы

I. Теория относительности, в том числе и общая теория относительности, призвана описывать соотношения между событиями материального мира. Эта цель достигается с помощью математической модели классического пространства-времени, основной постулат которой состоит в том, что любое событие может быть сопоставлено с упорядоченной совокупностью из четырех (или в более общем

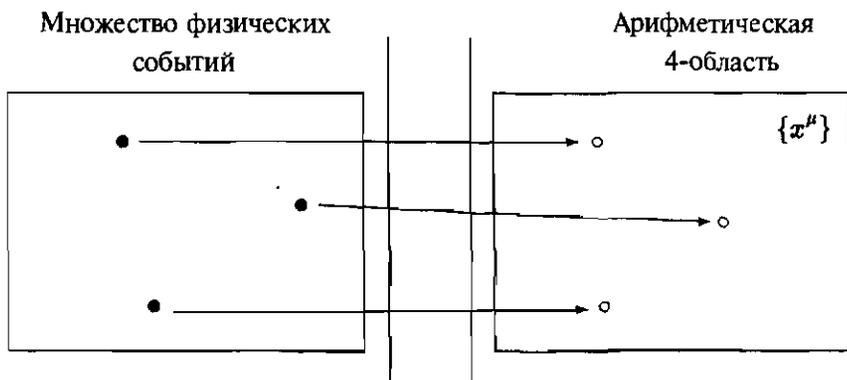


Рис. 1.1. Координатная система как соответствие физических событий с арифметическими точками

случае n) вещественных чисел $\{x^\alpha\} = \{x^0, x^1, x^2, x^3\}$, называемых *координатами точки-события*.

События материального мира составляют, как известно, некоторое множество. С другой стороны, используемая математическая модель имеет в виду множество арифметических 4-точек (n -точек), описываемых всеми возможными значениями четырех (или n) вещественных чисел. Таким образом в данной модели рассматриваются два множества объектов: множество физических точек-событий и множество арифметических точек, называемых *арифметическим пространством* четырех (или n) измерений. Постулируется соответствие как осуществившихся, так и всех других возможных физических событий с точками арифметического пространства (см. рис. 1.1).

Координатной системой называется установленное соответствие между событиями и арифметическими точками. Как задаются системы координат? Несомненно, это вопрос физический, а не математический. Существует ряд конструктивных способов задания координатных систем (некоторые из них будут рассмотрены ниже), однако для введения значительной части понятий общей теории относительности достаточно лишь самого факта существования координатной системы.

II. Если каким угодно образом задана одна система координат $\{x^\alpha\}$, то определяя четыре функции $F^\beta(x^\alpha)$, можно перейти к но-

вой нумерации точек, т. е. к другой системе координат

$$x'^{\beta} = F^{\beta}(x^{\alpha}) \equiv x'^{\beta}(x^{\alpha}). \quad (1.1.1)$$

Из бесконечного множества всех возможных систем координат, получаемых таким образом, в общей теории относительности (ОТО) используется лишь подмножество так называемых *допустимых координатных систем*. Чтобы их охарактеризовать, напомним ряд определений.

Функцию $F(x^{\alpha})$, определенную для всех точек *арифметической n -области* $[x]$, называют *функцией класса u* , если она и ее производные порядка, меньшего или равного u , существуют и непрерывны в каждой точке данной области определения. Здесь u — любое целое положительное число. В ОТО обычно полагают $u \geq 2$. Соответствие, при котором арифметическая n -область $[x]$ отображается в некоторое множество $[x']$ при помощи n функций класса u , называется *преобразованием класса u* , переводящим $[x]$ в $[x']$. Преобразование арифметической области $[x]$ называется *регулярным* класса u тогда и только тогда, когда оно взаимно однозначно и его якобиан не обращается в нуль ни в одной точке $[x]$.

Множество допустимых систем координат определяется как совокупность систем координат, получаемых из физически заданной системы координат посредством всевозможных регулярных преобразований $x'^{\beta} = x'^{\beta}(x^{\alpha})$. Такие преобразования, связывающие допустимые координатные системы, называются *допустимыми координатными преобразованиями*.

III. Легко видеть, что два последовательно произведенные допустимые преобразования образуют также допустимое преобразование

$$x'^{\beta} = x'^{\beta}(x^{\alpha}) \oplus x''^{\mu} = x''^{\mu}(x'^{\beta}) \Rightarrow x''^{\mu} = x''^{\mu}(x'^{\beta}(x^{\alpha})) \quad (1.1.2)$$

(см. рис. 1.2). Каждое допустимое преобразование имеет обратное допустимое преобразование

$$x'^{\beta} = x'^{\beta}(x^{\alpha}) \longleftrightarrow x^{\alpha} = x^{\alpha}(x'^{\beta}). \quad (1.1.3)$$

Тожественное преобразование, которое не меняет установленное соответствие, следует назвать *единичным*. Следовательно, *совокупность всех допустимых координатных преобразований образует группу*.

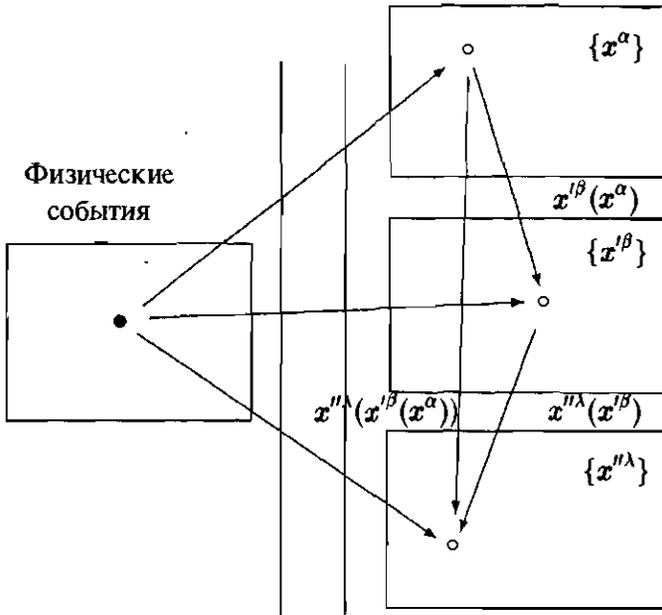


Рис. 1.2. Группа допустимых координатных преобразований

Все допустимые системы координат являются равноправными, и несущественно, если это особо не оговорено, из какой системы координат этого множества нужно исходить.

IV. Сделаем ряд замечаний относительно характера используемой математической модели.

- В теории относительности (специальной и особенно в общей) нет необходимости (и оснований) требовать наличия координатной системы сразу для всего множества событий материального мира. Достаточно полагать, что допустимые координатные системы существуют для изучаемых подмножеств физических событий.

- В теории относительности необходимо требовать лишь соответствие рассматриваемого множества физических событий некоторому (в общем случае дискретному) подмножеству арифметических точек пространства, однако молчаливо предполагается более сильное утверждение о наличии физических событий, соответствующих всем точкам арифметического пространства или отдельным арифметических областей. В большинстве задач классической физики

это допустимо, однако в некоторых случаях оно может привести к ряду недоразумений.

1.1.2. Основы тензорной алгебры

I. В теории относительности рассматривается ряд физических и геометрических величин, так или иначе характеризующих происходящие в материальном мире события, причем эти величины, как правило, составляют некий набор численных значений, привязанных к точкам-событиям, а следовательно, и к арифметическим точкам. Оказывается, в теории относительности используются не все возможные мыслимые наборы величин, а лишь специальные их классы, жестко привязанные к свойствам допустимых координатных систем и синхронно (по групповому закону) изменяющиеся при переходе к иным допустимым координатным системам.

Это накладывает ряд условий на используемый класс физических величин. Прежде всего, число величин m в наборе должно быть целой степенью N размерности пространственно-временного многообразия $m = 4^N$, что принято изображать совокупностью из N буквенных индексов. Будем использовать греческие индексы, пробегающие в классической ОТО четыре значения: 0, 1, 2, 3, например, $B(x)[\mu]$ характеризует набор из четырех величин в точке x , $B(x)[\mu\nu]$ — набор из 16 компонент и т. д. В дальнейшем без особой надобности не будем указывать аргумент x , где определен набор величин, а индексы будем писать не в квадратных скобках, а сверху или снизу справа.

II. Существует два и только два закона групповых преобразований наборов величин, соответствующих группе допустимых координатных преобразований:

$$B'^{\mu\nu\dots} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \dots \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} \dots B^{\alpha\beta\dots} \equiv \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} \dots B^{\alpha\beta\dots}; \quad (1.1.4)$$

$$B'_{\mu\nu\dots} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \dots \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} \dots B_{\alpha\beta\dots} \equiv \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} \dots B_{\alpha\beta\dots} \quad (1.1.5)$$

Преобразующиеся подобным образом величины называются *тензорами* (см. [10, 13]). Тензоры, преобразующиеся по первому закону, называются *контравариантными* (индексы пишутся сверху), а по второму закону — *ковариантными* (индексы пишутся снизу). Возможны смешанные тензоры произвольного ранга. Тензор нулевого ранга — *скаляр* (число, которое не изменяется при преобразованиях координат); тензор первого ранга — *вектор*. Простейшим примером контравариантных векторов является набор из дифференциалов самих координат, а примером ковариантных векторов могут служить компоненты градиента скаляра.

Для упрощения записи принято не писать знаки суммы и подразумевать суммирование всякий раз, когда встречаются два одинаковых индекса (один сверху, а другой снизу). Так, закон преобразования произвольного тензора имеет вид:

$$B_{\mu\nu\cdots}^{\alpha\beta\cdots} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \cdots \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\delta} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\rho} \cdots B_{\lambda\sigma\cdots}^{\delta\rho\cdots} \quad (1.1.6)$$

Всякий дважды встречающийся индекс, часто называемый «немым», можно заменить любым другим.

III. В множестве тензорных величин определены три операции:

- 1) *Операция сложения и вычитания* тензоров одинакового ранга и одинаковой ковариантности, т. е. с одинаковыми числами соответственно ко- и контравариантных индексов:

$$A_{\mu\nu\cdots}^{\alpha\beta\cdots} + B_{\mu\nu\cdots}^{\alpha\beta\cdots} = C_{\mu\nu\cdots}^{\alpha\beta\cdots} \quad (1.1.7)$$

В итоге получается тензор того ранга и той же ковариантности.

- 2) *Операция внешнего произведения* двух и более тензоров:

$$A_{\mu\cdots}^{\alpha\cdots} B_{\nu\cdots}^{\beta\cdots} = C_{\mu\cdots\nu\cdots}^{\alpha\cdots\beta\cdots} \quad (1.1.8)$$

В результате получается тензор, ранг которого равен сумме рангов слагаемых тензоров.

- 3) *Операция внутреннего произведения* тензоров

$$A^{\mu\nu\cdots} B_{\mu\alpha\cdots} = C_{\alpha\cdots}^{\nu\cdots} \quad (1.1.9)$$

приводит к тензору, ранг которого равен сумме рангов слагаемых тензоров минус удвоенное число немых индексов.

IV. Тензор $B_{\mu\nu}$ называют *симметричным*, если $B_{\mu\nu} = B_{\nu\mu}$. Тензор $A_{\mu\nu}$ называется *антисимметричным*, если $A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}$. Любой тензор с двумя индексами одинаковой ковариантности можно представить в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров:

$$C_{\mu\nu} = \frac{C_{\mu\nu} + C_{\nu\mu}}{2} + \frac{C_{\mu\nu} - C_{\nu\mu}}{2}. \quad (1.1.10)$$

Внутреннее произведение по двум индексам симметричного (по этим индексам) тензора на антисимметричный (по этим же индексам) равно нулю. Действительно, пусть $B_{\mu\nu}$ — симметричный тензор, а $A_{\mu\nu}$ — антисимметричный тензор, тогда имеем цепочку соотношений:

$$B_{\mu\nu}A^{\mu\nu} = -B_{\mu\nu}A^{\nu\mu} = -B_{\nu\mu}A^{\nu\mu} = -B_{\mu\nu}A^{\mu\nu} = 0, \quad (1.1.11)$$

поскольку только нуль может быть равен себе с обратным знаком. Здесь при переходе к предпоследнему соотношению было произведено простое переобозначение двух пар «немых» индексов.

V. Для установления трансформационных свойств величин полезна *строгая теорема частного*: неизвестная величина является тензором, если ее внутреннее произведение с произвольным вектором (тензором) образует тензор.

Докажем эту теорему. Пусть $A(\alpha\beta)$ — величина с неизвестными трансформационными свойствами, а B^β — произвольный вектор и пусть известно, что

$$A(\alpha\beta)B^\beta = C_\alpha \quad (1.1.12)$$

образует вектор. Требуется доказать, что $A(\alpha\beta)$ является тензором. Для этого перейдем в штрихованную координатную систему, где можно записать

$$A'(\mu\nu)B'^{\nu} = C'_\mu. \quad (1.1.13)$$

Используя тензорный закон преобразований (1.1.6), из (1.1.13) находим

$$A'(\mu\nu)B'^{\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} C_\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} A(\alpha\beta)B^\beta = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} A(\alpha\beta)B'^{\nu}. \quad (1.1.14)$$

Собирая вместе первое и последнее выражения и вынося за скобку общее слагаемое — произвольный вектор B^{ν} , — приходим к соотношению

$$A'(\mu\nu) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\nu}} A(\alpha\beta), \quad (1.1.15)$$

доказывающему тензорный закон преобразований величины

$$A(\alpha\beta) \rightarrow A_{\alpha\beta}.$$

VI. Весь математический аппарат современной теории гравитации, т. е. общей теории относительности, описывается на языке тензорных величин, без использования которых ее содержание становится настолько громоздким и непрозрачным, что в ней чрезвычайно трудно ориентироваться.

Наконец, подчеркнем, что в общей теории относительности посредством тензоров описываются величины двух сортов: геометрические характеристики пространства-времени и физические понятия, вносимые в пространство-время извне. Такая двойственность пронизывает все содержание общей теории относительности. Это осознавалось как ее создателем, так и большинством ее исследователей, которые стремились развить и обобщить ее таким образом, чтобы все понятия теории носили исключительно геометрический характер.

Контрольные задания

1. Показать, что в 4-мерном пространстве все 256 компонент антисимметричного по всем индексам тензора четвертого ранга $B_{\mu\nu\alpha\beta}$ принимают одно из трех значений: $+B$, 0 , $-B$.
2. Показать, что величина B в предыдущем задании не является скаляром.

§ 1.2. Метрический тензор

Самым главным понятием в общей теории относительности и во всей физике является *метрика*, т. е. вещественное число, которое сопоставляется с двумя точками (событиями). В геометрии Евклида — это квадрат расстояния между точками, в теории относительности — это квадрат интервала между двумя событиями.

1.2.1. Обобщения теоремы Пифагора

Как это ни странно, на первый взгляд, но на суть общей теории относительности и всей геометрической картины мира можно посмотреть как на обобщения теоремы Пифагора, причем по двум каналам: а) увеличению размерности и б) переходу к искривленным многообразиям.

I а. Начнем с теоремы Пифагора на плоскости (в 2-мерном плоском пространстве)

$$\Delta l^2 = (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2, \quad (1.2.1)$$

где Δx^1 и Δx^2 — длины двух катетов, или, что одно и то же, разности декартовых координат двух рассматриваемых точек.

I б. Еще в первой половине XIX века К. Гауссом была разработана теория 2-мерных искривленных поверхностей, на которых уже невозможно определить прямолинейные декартовы координаты. В основу теории Гаусса было положено, во-первых, задание расстояний между двумя *близкими* точками на поверхности (см. рис. 1.3) и, во-вторых, внесение корректив в определение квадрата расстояния, так что формула (1.2.1) принимает вид

$$dl^2 = g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + 2g_{12} dx^1 dx^2, \quad (1.2.2)$$

где коэффициенты $g_{\xi\eta}(x)$ — функции криволинейных координат на искривленной 2-мерной поверхности. Расстояние между произвольными двумя точками определяются в виде интеграла вдоль кратчайшей или вдоль какой-то другой кривой, соединяющей две точки.

II а. В 3-мерном евклидовом пространстве квадрат расстояния между двумя точками определяется посредством увеличения на одну координату формулы (1.2.1) (теоремы Пифагора):

$$\Delta l^2 = (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2. \quad (1.2.3)$$

Трудно сказать, кем впервые это было сделано. Известно лишь то, что такая формула писалась Декартом.

II б. Обобщение формулы (1.2.2) на случай искривленных 3-мерных пространств было сделано Б. Риманом в лекции, в свое время воодушевившей Гаусса. Он использовал развитую Гауссом геометрию

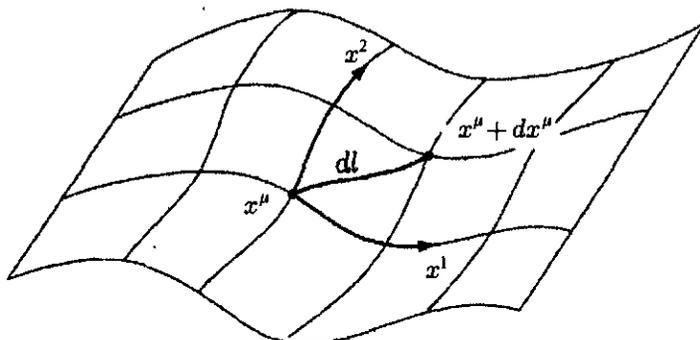


Рис. 1.3. Смещения на 2-мерной искривленной поверхности, где заданы криволинейные координаты

2-мерных кривых поверхностей и ввел понятие «многократно протяженных величин», означающее, что пространство — всего лишь трехкратно протяженная величина, для которой подходят методы описания 2-кратно протяженных величин, т. е. квадрат длины между двумя близкими точками в искривленном пространстве должен иметь вид, аналогичный (1.2.2):

$$dl^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 g_{ik} dx^i dx^k \equiv g_{ik} dx^i dx^k, \quad (1.2.4)$$

где $g_{ik}(x)$ — коэффициенты — комплексные компоненты метрики, зависящие от трех координат. Здесь использовано ранее введенное правило: по двум одинаковым индексам (сверху и снизу) подразумевается суммирование, — в данном случае от 1 до 3.

III а. Согласно специальной теории относительности, пространство и время образуют единое 4-мерное многообразие. Теперь ключевым выражением является квадрат интервала Δs^2 между двумя событиями, который представляет собой обобщение теоремы Пифагора на еще одно измерение и на псевдоевклидову сигнатуру:

$$\begin{aligned} \Delta s^2 &= (c\Delta t)^2 - \Delta l^2 \equiv (\Delta x^0)^2 - (\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2 \equiv \\ &\equiv \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu, \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

где $\Delta t = \Delta x^0/c$ — разность времен между двумя событиями, остальные обозначения прежние.

III б. В упомянутой во Введении работе Эйнштейна и Гроссмана была записана формула для квадрата интервала в 4-мерном искривленном пространстве-времени

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.2.6)$$

Здесь и далее греческие индексы пробегают четыре значения: 0, 1, 2, 3, по которым подразумевается суммирование. Очевидно, что эта формула обобщает метрику (1.2.5) в специальной теории относительности.

Таким образом, в основе эйнштейновской ОТО лежит представление об искривленном (римановом) 4-мерном пространстве-времени, в котором квадрат интервала (парное отношение) между двумя близкими событиями, различающимися координатами dx^μ , задается формулой (1.2.6).

1.2.2. Метрический тензор и его свойства

I. В формуле (1.2.6) коэффициенты $g_{\mu\nu}$, называемые компонентами метрического тензора, можно представить в виде квадратной матрицы:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}. \quad (1.2.7)$$

Эти величины, зависящие от координат, описывают метрические свойства 4-мерного пространства-времени и одновременно являются тензорными потенциалами гравитационного «поля». С помощью строгой теоремы частного, когда dx^μ понимается как произвольный вектор, а справа в (1.2.6) стоит скаляр — тензор нулевого ранга, — легко показать, что $g_{\mu\nu}$ является ковариантным (метрическим) тензором второго ранга.

II. Представим метрический тензор в виде суммы симметричной и антисимметричной частей:

$$g_{\mu\nu} = g_{(\mu\nu)} + g_{[\mu\nu]}, \quad (1.2.8)$$

где $g_{(\mu\nu)} = g_{(\nu\mu)}$ и $g_{[\mu\nu]} = -g_{[\nu\mu]}$. Величина $dx^\mu dx^\nu$ в (1.2.6) — симметричный тензор второго ранга, следовательно, для определения квадрата интервала (метрики) антисимметричная часть метрического тензора несущественна, поэтому без ущерба для общности

следует считать метрический тензор симметричным. Это значит, что в самом общем случае в 4-мерном пространстве-времени метрический тензор имеет 10 различных компонент, где компоненты над главной диагональю в (1.2.7) равны компонентам под диагональю.

III. Ковариантным компонентам метрического тензора $g_{\mu\nu}$ ставятся в соответствие *контравариантные компоненты* согласно формуле

$$g^{\mu\nu} = \frac{\Delta_{\mu\nu}}{g}, \quad (1.2.9)$$

где $g = ||g_{\mu\nu}||$ — определитель, а $\Delta_{\mu\nu}$ — алгебраическое дополнение соответствующего элемента матрицы $(g_{\mu\nu})$. Внутреннее произведение

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\sigma} = g_{\sigma}^{\nu} \quad (1.2.10)$$

по известной теореме алгебры представляет собой символ Кронекера:

$$g_{\sigma}^{\nu} = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma = \nu \\ 0, & \text{если } \sigma \neq \nu \end{cases} \equiv \delta_{\sigma}^{\nu}. \quad (1.2.11)$$

Поскольку в выражении

$$g_{\sigma}^{\nu} B^{\sigma} = B^{\nu},$$

слева стоит произвольный вектор B^{σ} , а справа также получается вектор (тензорная величина), то по строгой теореме частного g_{σ}^{ν} является тензором, совпадающим с символами Кронекера. Эту величину называют *смешанным метрическим тензором*.

Записав цепочку соотношений

$$g^{\mu\nu} B_{\mu} = g^{\mu\nu} (g_{\mu\sigma} B^{\sigma}) = (g^{\mu\nu} g_{\mu\sigma}) B^{\sigma} = g_{\sigma}^{\nu} B^{\sigma} = B^{\nu},$$

на основе строгой теоремы частного приходим к выводу о тензорном характере величины $g^{\mu\nu}$, называемой *контравариантным метрическим тензором*.

С помощью метрического тензора поднимаются и опускаются индексы произвольных тензоров (производится «жонглирование» индексами), например

$$B_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = B_{\mu}^{\nu}; \quad B^{\mu} g_{\mu\nu} = B_{\nu}.$$

IV. В любой произвольной точке пространства-времени компоненты $g_{\mu\nu}$ выбором координатной системы всегда можно привести к каноническому виду

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.2.12)$$

соответствующему значениям метрического тензора $\eta_{\mu\nu}$ в специальной теории относительности в декартовых координатах. Координатная система, в которой метрический тензор (в избранной точке) имеет вид (1.2.12) справа, называется *локально декартовой координатной системой*.

V. Сумму диагональных элементов матрицы в (1.2.12) справа называют *сигнатурой*. Согласно известному в линейной алгебре закону инерции квадратичных форм, сигнатура представляет собой инвариантное свойство пространственно-временного многообразия. Ее нельзя изменить никаким допустимым координатным преобразованием. В общей теории относительности имеем сигнатуру $s = -2$. Часто под сигнатурой понимают эквивалентный данному определению вид строки из знаков при единицах на диагонали (+ - - -).

Обратим внимание на тот факт, что ряд авторов использует сигнатуру с противоположными знаками (- + + +). Принципиально это не меняет выводы теории, — изменяются лишь знаки в некоторых формулах. При описании классических аспектов физики выбор одной из этих двух возможностей не существен и является предметом соглашения, однако в микромире при использовании спиноров следует проявлять осторожность. Понятие спинора чувствительно как к размерности многообразия, в котором оно вводится, так и к его сигнатуре.

VI. Вернемся к определителю метрического тензора g , использованному в (1.2.9). Его можно представить в виде

$$g \equiv ||g_{\mu\nu}|| = \frac{\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}}{4} \cdot g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} g_{\gamma\lambda} g_{\delta\sigma}, \quad (1.2.13)$$

где введен полностью антисимметричный по всем индексам символ *Леви-Чивиты*, обладающий свойствами:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1, & \text{если компоненты приводятся} \\ & \text{к комбинации 0123 четным} \\ & \text{числом перестановок;} \\ 0, & \text{если есть совпадающие индексы;} \\ -1, & \text{если компоненты приводятся} \\ & \text{к комбинации 0123 нечетным} \\ & \text{числом перестановок.} \end{cases} \quad (1.2.14)$$

Символ Леви-Чивиты не является тензором, а определитель g не является скаляром. Последний преобразуется по закону

$$g' = \frac{g}{J^2},$$

где J — якобиан преобразования координат, представимый через компоненты символа Леви-Чивиты в виде

$$J = \frac{\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu} \partial x'^{\lambda} \partial x'^{\sigma}}{4! \partial x^{\alpha} \partial x^{\beta} \partial x^{\gamma} \partial x^{\delta}}. \quad (1.2.15)$$

VII. В общей теории относительности не определена операция интегрирования тензорных величин, однако можно интегрировать скалярные величины. Легко видеть, что элемент 4-мерного объема $d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ не является тензором, а преобразуется при помощи якобиана (1.2.15). Для получения инвариантного элемента объема необходимо образовать произведение

$$\sqrt{-g} d^4x = \sqrt{-g} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3, \quad (1.2.16)$$

так что интеграл по 4-мерной области от произвольной скалярной величины B записывается в виде

$$\iiint\iiint B \sqrt{-g} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3. \quad (1.2.17)$$

Часто вместо четырех значков интегрирования пишут лишь один d^4x . Произведение некой произвольной, не обязательно скалярной, величины на корень квадратный от определителя метрического тензора называется *плотностью этой величины* или, более

точно, плотностью веса плюс единица. Например, часто используется плотность контравариантного метрического тензора $\sqrt{-g}g^{\mu\nu}$.

1.2.3. Концептуальные вопросы введения метрики

В дополнение к изложенному материалу коснемся нескольких концептуальных вопросов, связанных с понятием метрики.

I. Прежде всего, следует напомнить, что уже в мемуаре Б. Римана «О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии» ставился вопрос о «внутренней причине возникновения метрических отношений в пространстве». По этому поводу Риман писал, «что в случае дискретного многообразия принцип метрических отношений содержится уже в самом понятии этого многообразия, тогда как в случае непрерывного многообразия его следует искать где-то в другом месте. Отсюда следует, что или то реальное, что создает идею пространства, образует дискретное многообразие, или же нужно пытаться объяснить возникновение метрических отношений чем-то внешним — силами связи, действующими на это реальное» [11, с. 32]. Завершается это обсуждение словами: «Здесь мы стоим на пороге области, принадлежащей другой науке — физике, и переступить его не дает нам повода сегодняшний день».

На этот момент мемуара Римана обратил внимание А. Эйнштейн, писавший: «Риман пришел к смелой мысли, что геометрические отношения тел могут быть обусловлены физическими причинами, т. е. силами. Таким образом, путем чисто математических рассуждений он пришел к мысли о неотделимости геометрии от физики» [15, с. 181].

В настоящий момент можно более определенно сказать о причине возникновения метрических отношений. В классической теории (геометрии и физике) понятие метрики в конце концов обусловлено счетом осуществившихся событий, тогда как аналог метрики в микромире действительно связан с физическими взаимодействиями.

II. Другой принципиально важный вопрос, также обсуждавшийся в мемуаре Римана, связан с обоснованием квадратичного характера метрики. В общем случае введение метрики означает задание двухточечной скалярной функции $I(x_{(1)}, x_{(2)})$, часто называемой «миро-

вой функцией». В дифференциальной геометрии метрика задается инфинитезимально, т. е. для двух близких точек, когда $I(x, x + dx)$. На мировую функцию накладываются условие равенства нулю при совпадении аргументов и условие симметрии по ее аргументам. Раскладывая мировую функцию в ряд по dx , легко убедиться, что все нечетные степени разложения отсутствуют, так что функция представляется в виде

$$I(x, x + dx) = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \tilde{g}_{\mu\nu\sigma\lambda} dx^\mu dx^\nu dx^\sigma dx^\lambda + \dots \quad (1.2.18)$$

В римановой геометрии используется простейший случай, т. е. теория строится лишь на первом квадратичном слагаемом.

III. Как уже отмечалось, для определения скалярной метрической функции (интервала) между двумя точками существенна лишь симметричная часть метрического тензора, тем не менее Эйнштейн в последние годы жизни анализировал физические возможности геометрической теории с несимметричным метрическим тензором $g_{\mu\nu} = g_{(\mu\nu)} + g_{[\mu\nu]}$. В такой теории симметричная и антисимметричная части метрического тензора преобразуются независимо друг от друга. Это послужило основанием для попыток связать симметричную и антисимметричную части с различными физическими понятиями: симметричную часть — с метрическим тензором общей теории относительности, а антисимметричную часть — с тензором электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$.

IV. Имеется серия работ по исследованию так называемых *биметрических теорий гравитации*, в которых используется не одна метрика, а две, т. е. два метрических тензора $g_{\mu\nu}$ и $\tilde{g}_{\mu\nu}$. Наиболее известна биметрическая теория Н. Розена, где вторая метрика вводится постулативно. Чаще всего в качестве второй метрики выбирается метрика пространства-времени Минковского.

Серьезные возражения против таких теорий связаны с неясностью физического смысла и с проблемой наблюдаемости второй метрики.

V. Неоднократно поднимался вопрос о возможности обоснования сигнатуры $(+ - - -)$ и размерности $n = 4$ классического пространства-времени, однако в рамках общей теории относительности эти

вопросы вряд ли возможно решить. Продвинуться в их решении удастся лишь в рамках геометрий большей размерности.

VI. Наконец, упомянем еще об одной важной проблеме, которая поднималась уже в мемуаре Римана, — о виде метрических отношений в микромире. Риман писал, что «вопрос о метрических отношениях пространства в неизмеримо малом не принадлежит к числу праздных (...) Эмпирические понятия, на которых основывается установление пространственных метрических отношений, — понятия твердого тела и светового луча, — повидимому, теряют всякую определенность в бесконечно малом. Поэтому вполне мыслимо, что метрические отношения пространства в бесконечно малом не отвечают геометрическим допущениям; мы действительно должны были бы принять это положение, если бы с его помощью более просто были объяснены наблюдаемые явления» [11, с. 32].

Контрольные задания

1. Найти число независимых компонент метрического тензора 4-го ранга $\tilde{g}_{\alpha\beta\mu\nu}$ в (1.2.18).
2. Показать, что символу Леви-Чивиты в (1.2.13) соответствует антисимметричный по всем индексам тензор Леви-Чивиты

$$E^{\alpha\beta\gamma\delta} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \cdot \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (1.2.19)$$

§ 1.3. Уравнения геодезических линий и ковариантное дифференцирование

В общей теории относительности важную роль играют первые производные от метрического тензора $\partial g_{\mu\nu}/\partial x^\lambda \equiv g_{\mu\nu,\lambda}$. Легко убедиться, что они не образуют тензора, более того, из первых производных от метрического тензора вообще невозможно построить тензорную величину, однако в теории возникает устойчивая комбинация из первых производных от $g_{\mu\nu}$, к которой можно прийти разными путями. Будем исходить из уравнений геодезических линий.

1.3.1. Уравнения геодезических линий и символы Кристоффеля

I. В искривленном многообразии геодезическая линия (или просто геодезическая) играет роль прямой линии плоского пространства-

времени. В первой неевклидовой (гиперболической) геометрии Лобачевского в качестве геодезических выступают гиперболы, в сферической геометрии Римана таковыми являются дуги большого радиуса. Уравнения геодезической находятся из условия экстремальности длины линии, соединяющей две выбранные точки A и B ,

$$\delta \int_A^B ds = \int_A^B \delta(ds) = 0 \quad (1.3.1)$$

при условиях на концах

$$\delta(ds)_{(A)} = \delta(ds)_{(B)} = \delta x_{(A)} = \delta x_{(B)} = 0. \quad (1.3.2)$$

Перепишем вариацию интервала, исходя из соотношений

$$\begin{aligned} \delta(ds^2) &= 2 ds \delta(ds) \rightarrow \delta(ds) = \frac{1}{2 ds} \delta(g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu) = \\ &= \frac{1}{2 ds} \left[\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \delta x^\sigma dx^\mu dx^\nu + g_{\mu\nu} dx^\mu d(\delta x^\nu) + g_{\mu\nu} dx^\nu d(\delta x^\mu) \right], \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

где использовано $\delta(dx^\mu) = d(\delta x^\mu)$. Подставим это выражение под знак интеграла, разделив и умножив на ds , тогда получим

$$\int_A^B \delta(ds) = \frac{1}{2} \int_A^B \left[\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \delta x^\sigma + \left(g_{\sigma\nu} \frac{dx^\nu}{ds} + g_{\mu\sigma} \frac{dx^\mu}{ds} \right) \frac{d(\delta x^\sigma)}{ds} \right] ds. \quad (1.3.4)$$

Проинтегрируем подинтегральное выражение в круглых скобках по частям:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_A^B \left(g_{\sigma\nu} \frac{dx^\nu}{ds} + g_{\mu\sigma} \frac{dx^\mu}{ds} \right) \frac{d(\delta x^\sigma)}{ds} ds = \\ &= \frac{1}{2} \left(g_{\sigma\nu} \frac{dx^\nu}{ds} + g_{\mu\sigma} \frac{dx^\mu}{ds} \right) \delta x^\sigma \Big|_A^B - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_A^B \delta x^\sigma \frac{d}{ds} \left(g_{\sigma\nu} \frac{dx^\nu}{ds} + g_{\mu\sigma} \frac{dx^\mu}{ds} \right) ds. \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

Первое слагаемое, вследствие (1.3.2), обращается в нуль. Подставляя оставшуюся часть в (1.3.4) и производя дифференцирование, приходим к выражению

$$\frac{1}{2} \int_A^B \left[\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} \right) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - 2g_{\sigma\nu} \frac{d^2 x^\nu}{ds^2} \right] ds \delta x^\sigma = 0. \quad (1.3.6)$$

Из того, что интеграл обращается в нуль при любых вариациях δx^σ , следует равенство нулю выражения, заключенного в квадратных скобках. Поднимая в нем индекс σ вверх, приходим к уравнениям геодезических линий

$$\frac{d^2 x^\lambda}{ds^2} = -\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}, \quad (1.3.7)$$

где

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{g^{\lambda\sigma}}{2} \left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \right) \quad (1.3.8)$$

— искомая комбинация из первых производных от метрического тензора, называемая символами Кристоффеля.

1.3.2. Анализ уравнений геодезических линий

Обсудим физический смысл (геометрических) уравнений геодезических линий.

I. На первых этапах создания и развития общей теории относительности постулировалось, что тела в искривленном пространстве-времени движутся по геодезическим линиям при отсутствии других сторонних сил. Затем было показано, что эти уравнения являются следствием уравнений Эйнштейна.

II. Уравнения геодезических линий являются дифференциальными уравнениями 2-го порядка, как и все остальные уравнения движения в классической физике, например, уравнения движения Ньютона

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}. \quad (1.3.9)$$

III. В уравнениях геодезической линии отсутствует масса тела, что отражает проявление принципа эквивалентности (все тела движутся в искривленном пространстве-времени независимо от значений их масс). В механике Ньютона это соответствует движению масс под действием ньютоновой гравитационной силы

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathcal{F}_{(g\mathbf{r})} = G \frac{mM}{r^2} = mg \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = G \frac{M}{r^2} = g. \quad (1.3.10)$$

Уже со времени известных экспериментов Галилея по падению тел с Пизанской башни можно было выдвинуть гипотезу, что, поскольку все тела падают одинаково, независимо от их масс, то ускорение свободного падения зависит не от тел, а от свойств того места в пространстве, где они оказались. Однако в то время пространство представлялось чрезвычайно бедным по своим свойствам (однородным и изотропным). Не было возможности связать ускорения падения с какими-либо свойствами пространства. Эта возможность появилась при использовании римановой геометрии. Уравнения геодезических линий реализуют идею обусловленности ускорения свободного падения значениями компонент метрического тензора искривленного пространства-времени.

IV. В уравнениях геодезических линий проявляется принцип соответствия более общей теории (эйнштейновской теории гравитации) с ньютоновой теорией гравитации в евклидовом пространстве. Поскольку для нерелятивистских частиц наибольшее значение 4-скорости u^μ имеет компонента u^0 , то, взяв компоненту уравнений геодезической линии вдоль радиуса (при значении $\lambda = 1$, когда $x^1 = r$), находим, что основной вклад дает слагаемое

$$\Gamma_{00}^1 u^0 u^0 \sim -\frac{\partial g_{00}}{\partial r} u^0 u^0 \quad \rightarrow \quad \mathcal{F}^1 = -\frac{\partial \varphi(r)}{\partial r}. \quad (1.3.11)$$

Сравнивая уравнения (1.3.7) и (1.3.9), приходим к выводу, что компонента g_{00} соответствует ньютонову гравитационному потенциалу $\varphi(r)$.

V. Уравнения геодезической можно сопоставить с уравнениями движения заряженных частиц в электродинамике

$$\frac{d^2 x^\lambda}{ds^2} = \frac{q}{mc^2} F^\lambda{}_\mu \frac{dx^\mu}{ds}, \quad (1.3.12)$$

где q — электрический заряд, m — масса заряженной частицы, $F_{\mu\nu}$ — тензор напряженности электромагнитного поля. В этом уравнении справа также присутствует скорость, однако в первой степени.

VI. Уравнения движения заряженной частицы в искривленном пространстве-времени в присутствии электромагнитного поля получаются объединением уравнений (1.3.7) и (1.3.12):

$$\frac{d^2 x^\lambda}{ds^2} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} + \frac{q}{mc^2} F^\lambda{}_\mu \frac{dx^\mu}{ds}. \quad (1.3.13)$$

В этих уравнениях проявился, во-первых, дуалистический характер общей теории относительности, в которой фигурируют величины как геометрической (первое слагаемое справа), так и физической природы (сила Лоренца справа), и, во-вторых, уравнения демонстрируют, что теория Эйнштейна представляет собой лишь первый шаг на пути к полной геометризации физики. В ней электромагнитное поле еще не геометризовано. В дальнейшем Т. Калуцей было показано, что в рамках 5-мерной теории можно представить правую часть уравнений (1.3.13) исключительно через геометрические величины.

VII. Отметим, что уравнения геодезических линий описывают свободное движение пробных частиц, структурой которых можно пренебречь. Движение более сложных частиц (протяженных размеров, вращающихся) описываются уравнениями Матиссона—Папалетру, с которыми можно ознакомиться в монографии [1, с. 43–46].

1.3.3. Трансформационные свойства символов Кристоффеля

Символы Кристоффеля не являются тензорной величиной. При переходе от одной системы координат к другой они преобразуются по закону

$$(\Gamma_{\mu\nu}^\lambda)' = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma} \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha}; \quad (1.3.14)$$

$$(\Gamma_{\mu\nu,\sigma})' \equiv (\Gamma_{\mu\nu}^\lambda)' g'_{\lambda\sigma} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\sigma} \Gamma_{\alpha\beta,\gamma} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\sigma} g_{\alpha\beta}. \quad (1.3.15)$$

Из этих формул видно, что тензорный закон преобразований нарушается присутствием справа вторых производных, которые исчезают при линейных преобразованиях координат.

В любой точке многообразия всегда можно выбрать *локально-геодезическую координатную систему*, в которой все компоненты символа Кристоффеля равны нулю. Это преобразование имеет вид

$$x'^{\mu} = (x^{\mu} - x^{\mu}_{(A)}) + \frac{1}{2}(\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta})_{(A)}(x^{\alpha} - x^{\alpha}_{(A)})(x^{\beta} - x^{\beta}_{(A)}), \quad (1.3.16)$$

где индекс (A) снизу означает значение величин в точке A . Более того, всегда можно выбрать *геодезическую координатную систему*, в которой компоненты символов Кристоффеля обращаются в нуль на всей геодезической линии.

1.3.4. Ковариантные производные

I. Легко убедиться, что частные производные от тензорных величин в искривленном пространстве-времени в общем случае не являются тензорными величинами, например

$$\frac{\partial B_{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} B'_{\alpha} \right) = \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial B'_{\alpha}}{\partial x'^{\beta}} + \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} B'_{\alpha}. \quad (1.3.17)$$

Тензорный закон преобразований нарушается последним слагаемым справа, отличным от нуля в случае, когда преобразования координат не являются линейными.

II. Тензорный характер можно восстановить, если обобщить оператор частного дифференцирования, добавив к (1.3.17) выражение, содержащее также нетензорную величину с символом Кристоффеля, преобразующимся согласно (1.3.14):

$$\frac{\partial B_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} B_{\lambda} \equiv \nabla_{\nu} B_{\mu} \equiv B_{\mu;\nu}. \quad (1.3.18)$$

Это тензорное выражение называется *ковариантной производной* от ковариантного вектора B_{μ} . Отметим, что этот прием устранения (компенсации) нежелательных слагаемых в операторах дифференцирования фактически использован в так называемом калибровочном подходе к описанию взаимодействий.

Аналогичным образом можно определить ковариантную производную от контравариантного вектора:

$$\frac{\partial B^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu B^\lambda \equiv \nabla_\nu B^\mu \equiv B_{;\nu}^\mu. \quad (1.3.19)$$

Ковариантные производные от тензора произвольного ранга и ковариантности имеют вид

$$\nabla_\sigma B_{\nu\dots}^{\mu\dots} = \frac{\partial B_{\nu\dots}^{\mu\dots}}{\partial x^\sigma} + \Gamma_{\lambda\sigma}^\mu B_{\nu\dots}^{\lambda\dots} + \dots - \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda B_{\lambda\dots}^{\mu\dots} - \dots, \quad (1.3.20)$$

где многоточия в основной строке означают, что аналогичные выражения с символами Кристоффеля пишутся для каждого ко- или контравариантного индекса тензорной величины $B_{\nu\dots}^{\mu\dots}$.

III. Операция ковариантного дифференцирования обладает следующими свойствами:

- Ковариантная производная от скаляра совпадает с частной производной

$$\nabla_\sigma B = \frac{\partial B}{\partial x^\sigma}. \quad (1.3.21)$$

- Ковариантная производная от суммы тензорных величин равна сумме ковариантных производных:

$$\nabla_\sigma (A_{\nu\dots}^{\mu\dots} + B_{\nu\dots}^{\mu\dots}) = \nabla_\sigma A_{\nu\dots}^{\mu\dots} + \nabla_\sigma B_{\nu\dots}^{\mu\dots}. \quad (1.3.22)$$

- Для ковариантного дифференцирования произведения тензорных величин имеет место правило Лейбница:

$$\nabla_\sigma (A_{\nu\dots}^{\mu\dots} B_{\beta\dots}^{\alpha\dots}) = (\nabla_\sigma A_{\nu\dots}^{\mu\dots}) B_{\beta\dots}^{\alpha\dots} + A_{\nu\dots}^{\mu\dots} (\nabla_\sigma B_{\beta\dots}^{\alpha\dots}). \quad (1.3.23)$$

Легко показать, что это свойство выполняется и для операции внутреннего произведения.

- Ковариантная производная от метрического тензора равна нулю:

$$\nabla_\sigma g_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu;\sigma} = 0. \quad (1.3.24)$$

Это свойство позволяет при дифференцировании выносить метрический тензор за знак оператора, т. е. рассматривать метрический тензор как постоянный коэффициент.

IV. С помощью оператора ковариантного дифференцирования уравнения геодезических линий (1.3.7) можно представить в следующей форме

$$\frac{du^\lambda}{ds} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda u^\mu u^\nu = 0 \quad \rightarrow \quad u^\mu \nabla_\mu u^\lambda = 0. \quad (1.3.25)$$

Такой вид позволяет записать уравнения для изотропных геодезических линий, вдоль которых интервал равен нулю. В этом случае вместо вектора 4-скорости u^λ следует использовать изотропный волновой вектор k^λ , обладающий свойством

$$g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = 0, \quad (1.3.26)$$

а вместо уравнения геодезических линий (1.3.25) следует писать уравнение

$$k^\mu \nabla_\mu k^\lambda = 0. \quad (1.3.27)$$

V. Заметим, что ковариантную производную можно определить через *операцию параллельного переноса* тензорных величин в искривленном пространстве-времени, что будет сделано позже.

Контрольные задания

1. Вывести самостоятельно формулы (1.3.14) и (1.3.15), пользуясь соотношением (1.3.8) и тензорным законом преобразований компонент метрики $g_{\mu\nu}$.
2. Продемонстрировать, что при преобразованиях (1.3.16) все символы Кристоффеля в точке A равны нулю.
3. Доказать, что

$$\Gamma_{\nu\mu}^\nu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\mu}. \quad (1.3.28)$$

§ 1.4. Тензор кривизны и его свойства

Ключевые уравнения классической физики, как правило, являются дифференциальными уравнениями второго порядка. Такой же характер имеют и уравнения Эйнштейна, описывающие искривленную метрику пространства-времени, — они являются дифференциальными уравнениями второго порядка относительно компонент метрического тензора. Чтобы их записать, сначала следует ввести

важную геометрическую характеристику, содержащую вторые производные от метрического тензора, — тензор кривизны.

1.4.1. Тензор кривизны

I. Тензор кривизны представляет собой комбинацию из вторых и первых производных от метрического тензора. К тензору кривизны можно прийти различными путями. Одним из них является формальный путь, состоящий в коммутации вторых ковариантных производных от произвольного вектора B_α (в римановом пространстве-времени). Легко убедиться, что

$$B_{\alpha;\nu;\mu} - B_{\alpha;\mu;\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}(B_{\alpha;\nu}) - \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma(B_{\sigma;\nu}) - \\ - \Gamma_{\nu\mu}^\sigma(B_{\alpha;\sigma}) - B_{\alpha;\mu;\nu} = R_{\alpha\nu\mu}^\lambda B_\lambda, \quad (1.4.1)$$

где

$$R_{\alpha\nu\mu}^\lambda = \frac{\partial \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda - \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda \quad (1.4.2)$$

— тензор кривизны четвертого ранга (тензор Римана—Кристоффеля). Формулу (1.4.1) можно обобщить на случай тензора $B_{\alpha\dots}^{\lambda\dots}$ произвольного ранга.

II. Другой путь введения тензора кривизны основан на рассмотрении операции параллельного переноса смещений (или тензоров) по замкнутому контуру. Этот путь рассмотрен ниже (в § 1.6).

III. Тензор Римана—Кристоффеля в римановом пространстве-времени обладает следующими свойствами:

- Из определения тензора следует его антисимметрия по второй паре индексов

$$R_{\alpha\nu\mu}^\lambda = -R_{\alpha\mu\nu}^\lambda. \quad (1.4.3)$$

- Как показывает непосредственная проверка, в римановой геометрии тензор кривизны антисимметричен по первой паре индексов

$$R_{\beta\alpha\nu\mu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu}, \quad (1.4.4)$$

где $R_{\alpha\beta\nu\mu} = R_{\beta\mu\nu}^\lambda g_{\lambda\alpha}$.

- Тензор кривизны симметричен относительно перестановки двух пар индексов:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (1.4.5)$$

- Имеет место алгебраическое тождество Риччи

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} + R^{\alpha}_{\nu\beta\mu} + R^{\alpha}_{\mu\nu\beta} = 0, \quad (1.4.6)$$

которое легко доказать, воспользовавшись локально геодезической координатной системой, где (в рассматриваемой точке A) тензор Римана—Кристоффеля представляется в виде

$$(R^{\lambda}_{\alpha\nu\mu})_{(A)} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu}}{\partial x^{\mu}}.$$

Если некий тензор равен нулю в какой-либо одной координатной системе, то он равен нулю и во всех других допустимых координатных системах.

- Имеет место дифференциальное тождество Бианки

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu;\sigma} + R^{\alpha}_{\beta\sigma\mu;\nu} + R^{\alpha}_{\beta\nu\sigma;\mu} = 0. \quad (1.4.7)$$

Это тождество проще всего доказать, опять используя локально-геодезическую координатную систему.

IV. Первые четыре (алгебраические) свойства симметрии приводят к тому, что в 4-мерном пространстве-времени в самом общем случае независимыми являются лишь 20 компонент тензора Римана—Кристоффеля. Используя свойство симметрии ковариантного тензора кривизны, обозначим его компоненты двумя индексами A и B , пробегающими 6 значений, которые соответствуют следующим комбинациям пар 4-мерных индексов:

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow 01; & \dot{1} &\rightarrow 23; \\ 2 &\rightarrow 02; & \dot{2} &\rightarrow 31; \\ 3 &\rightarrow 03; & \dot{3} &\rightarrow 12. \end{aligned}$$

Такое выражение можно представить в виде симметричной 6×6 -матрицы:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} \Rightarrow R_{AB} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{1\dot{1}} & R_{1\dot{2}} & R_{1\dot{3}} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{2\dot{1}} & R_{2\dot{2}} & R_{2\dot{3}} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{3\dot{1}} & R_{3\dot{2}} & R_{3\dot{3}} \\ \hline R_{\dot{1}1} & R_{\dot{1}2} & R_{\dot{1}3} & R_{\dot{1}\dot{1}} & R_{\dot{1}\dot{2}} & R_{\dot{1}\dot{3}} \\ R_{\dot{2}1} & R_{\dot{2}2} & R_{\dot{2}3} & R_{\dot{2}\dot{1}} & R_{\dot{2}\dot{2}} & R_{\dot{2}\dot{3}} \\ R_{\dot{3}1} & R_{\dot{3}2} & R_{\dot{3}3} & R_{\dot{3}\dot{1}} & R_{\dot{3}\dot{2}} & R_{\dot{3}\dot{3}} \end{array} \right) \equiv \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & Z \end{pmatrix}, \quad (1.4.8)$$

где справа введены три 3×3 -матрицы. Вертикальной и горизонтальной линиями разделены компоненты с индексами двух типов.

V. Из тензора Римана—Кристоффеля строятся тензоры кривизны меньших рангов:

$$R_{\beta\nu} = R_{\nu\beta} \equiv R_{\beta\lambda\nu}^{\lambda} = \frac{\partial \Gamma_{\beta\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial \Gamma_{\beta\lambda}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\beta\nu}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\lambda}^{\lambda} - \Gamma_{\beta\lambda}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda}; \quad (1.4.9)$$

$$R \equiv R_{\beta\nu} g^{\beta\nu} \quad (1.4.10)$$

соответственно *тензор Риччи* и *скалярная кривизна*.

1.4.2. Дополнения к свойствам тензора кривизны

I. Выражения для тензоров кривизны и их свойства симметрии справедливы в пространствах любой размерности, однако при размерностях 3 и 2 имеют место алгебраические соотношения между тензорами кривизны разного ранга. Так, для пространства трех измерений тензор Римана—Кристоффеля в общем случае имеет 6 различных компонент, столько же, сколько и 3-мерный тензор Риччи. Это позволяет из (1.4.9) обратно выразить тензор Римана—Кристоффеля через компоненты тензора Риччи и скалярную кривизну. Обозначая индексы, пробегающие три значения 1, 2, 3, малыми латинскими буквами, в пространстве трех измерений имеем

$$R_{\cdot jkl}^i = g_i^j R_{jk} - g_k^i R_{jl} + g_{jk} R_l^i - g_{jl} R_k^i - \frac{1}{2} (g_i^j g_{jk} - g_k^i g_{jl}) R. \quad (1.4.11)$$

II. В пространстве двух измерений тензор Римана—Кристоффеля можно алгебраически выразить через компоненты метрического

тензора и скалярную кривизну. Обозначая буквами ξ, η, ζ, χ индексы, пробегающие два значения (например, 1 и 2), имеем

$$R_{\eta\zeta\chi}^{\xi} = -\frac{R}{2}(g_{\chi}^{\xi}g_{\eta\zeta} - g_{\zeta}^{\xi}g_{\eta\chi}). \quad (1.4.12)$$

Таким образом, тензор Римана—Кристоффеля является алгебраически независимым от тензора Риччи и скалярной кривизны, начиная с размерности четыре и выше.

III. В пространстве-времени размерности $n \geq 3$ число алгебраически независимых компонент тензора Римана—Кристоффеля дается формулой

$$N = \frac{n^2(n^2 - 1)}{12}. \quad (1.4.13)$$

1.4.3. Конформное соответствие и тензор Вейля

I. Сразу же после создания общей теории относительности Г. Вейлем было предложено первое обобщение римановой геометрии, в основу которого было положено дополнение группы допустимых координатных преобразований (1.1.1) группой так называемых *конформных преобразований* (см. [11, с. 36]). Их суть состояла в следующем. Два римановых пространства с метрическими тензорами $g_{\alpha\beta}(x)$ и $\tilde{g}_{\alpha\beta}(x)$, определенными на одном и том же многообразии точек, называются *конформно соответствующими*, если

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}(x) = e^{2\sigma(x)} g_{\alpha\beta}, \quad (1.4.14)$$

где $\sigma(x)$ — некоторая скалярная функция координат. В таких пространствах длины векторов с одинаковыми компонентами dx^{α} различаются множителем, зависящим только от выбранной точки:

$$d\tilde{s} = \sqrt{\tilde{g}_{\alpha\beta}(x) dx^{\alpha} dx^{\beta}} = e^{\sigma(x)} ds. \quad (1.4.15)$$

II. В конформно соответствующих пространствах углы между парами векторов одинаковы. Действительно, для углов между векторами с компонентами dx^{α} и δx^{α} в двух конформно соответствующих пространствах имеем

$$\cos(dx^{\alpha}, \delta x^{\alpha}) = \frac{g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} \delta x^{\beta}}{\sqrt{g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}} \cdot \sqrt{g_{\lambda\kappa} \delta x^{\lambda} \delta x^{\kappa}}}. \quad (1.4.16)$$

III. Из определения (1.4.14) следуют соотношения между геометрическими величинами конформно соответствующих римановых пространств произвольной сигнатуры и размерности n :

$$\tilde{g}^{\alpha\beta} = e^{-2\sigma} g^{\alpha\beta}; \quad \tilde{g}_\alpha^\beta = g_\alpha^\beta; \quad \sqrt{-\tilde{g}} = e^{n\sigma} \sqrt{-g}; \quad (1.4.17)$$

$$\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + g_\beta^\alpha \sigma_\gamma + g_\gamma^\alpha \sigma_\beta - g_{\beta\gamma} g^{\alpha\lambda} \sigma_\lambda; \quad (1.4.18)$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\beta\gamma\delta}^\alpha &= R_{\beta\gamma\delta}^\alpha + g_\delta^\alpha \sigma_{\beta\gamma} - g_\gamma^\alpha \sigma_{\beta\delta} + g^{\alpha\nu} (g_{\beta\gamma} \sigma_{\nu\delta} - g_{\beta\delta} \sigma_{\nu\gamma}) + \\ &+ (g_\delta^\alpha g_{\beta\gamma} - g_\gamma^\alpha g_{\beta\delta}) \Delta_1 \sigma; \end{aligned} \quad (1.4.19)$$

$$\tilde{R}_{\beta\delta} = R_{\beta\delta} - (n-2) \sigma_{\beta\delta} - [\Delta_2 \sigma + (n-2) \Delta_1 \sigma] g_{\beta\delta}; \quad (1.4.20)$$

$$\tilde{R} = e^{-2\sigma} [R - 2(n-1) \Delta_2 \sigma - (n-1)(n-2) \Delta_1 \sigma], \quad (1.4.21)$$

где использованы обозначения:

$$\begin{aligned} \sigma_\mu &= \frac{\partial \sigma}{\partial x^\mu}; \quad \sigma_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \nabla_\beta \sigma - \frac{\partial \sigma}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \sigma}{\partial x^\beta}; \\ \Delta_1 \sigma &= g^{\alpha\beta} \frac{\partial \sigma}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \sigma}{\partial x^\beta}; \quad \Delta_2 \sigma = g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \sigma. \end{aligned} \quad (1.4.22)$$

IV. Из компонент тензора кривизны можно сконструировать конформно инвариантный тензор

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{\beta\gamma\delta}^\alpha &= C_{\beta\gamma\delta}^\alpha = R_{\beta\gamma\delta}^\alpha - \frac{1}{(n-2)} (g_\gamma^\alpha R_{\beta\delta} - g_\delta^\alpha R_{\beta\gamma} + R_\gamma^\alpha g_{\beta\delta} - R_\delta^\alpha g_{\beta\gamma}) - \\ &- \frac{R}{(n-1)(n-2)} (g_\delta^\alpha g_{\beta\gamma} - g_\gamma^\alpha g_{\beta\delta}), \end{aligned} \quad (1.4.23)$$

называемый *тензором Вейля*.

Тензор Вейля обладает следующими основными свойствами:

- В пустом пространстве-времени (когда $R_{\mu\nu} = 0$) $C_{\beta\gamma\delta}^\alpha = R_{\beta\gamma\delta}^\alpha$.
- Тензор Вейля $C_{\beta\gamma\delta}^\alpha$ имеет те же самые свойства симметрии (1.4.3)–(1.4.6), что и тензор Римана—Кристоффеля.
- Для тензора Вейля отсутствует аналог тензора Риччи, так как $C_{\mu\alpha\nu}^\alpha = 0$.
- В многообразии трех измерений $C_{\beta\gamma\delta}^\alpha = 0$.

- Необходимым и достаточным признаком конформно плоских многообразий при $n > 3$ является обращение в нуль тензора Вейля.

Контрольные задания

1. Доказать свойство антисимметрии тензора Римана—Кристоффеля по первой паре индексов.
2. Показать, что тождества Риччи (1.4.6) накладывает лишь одно алгебраическое условие на компоненты тензора Римана—Кристоффеля, соответствующее различным значениям индексов.
3. Доказать тождества Бианки (1.4.7), используя локально-геодезическую координатную систему.
4. Показать справедливость выражения для компонент тензора Римана—Кристоффеля (1.4.11) в 3-мерном пространстве.
5. Показать, что в пространствах Эйнштейна, удовлетворяющих условиям $R_{\mu\nu} = \sigma g_{\mu\nu}$, матрица из компонент тензора Римана—Кристоффеля (1.4.8) сводится к виду

$$R_{AB} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & -X \end{pmatrix}. \quad (1.4.24)$$

§ 1.5. Уравнения Эйнштейна, Максвелла и Клейна—Фока

Опираясь на изложенные понятия и принципы римановой геометрии, введем уравнения Эйнштейна и уравнения главных физических полей в искривленном пространстве-времени.

Следует подчеркнуть, что **ключевые уравнения физики, такие как уравнения Эйнштейна, Максвелла, Клейна—Фока, Дирака и другие не выводятся, а открываются.** При чтении некоторых учебников может создаться впечатление, что эти уравнения выводятся. В действительности же рассуждения, предшествующие их записи, либо подготавливают читателя к их восприятию, либо в них постулируется что-то эквивалентное этим уравнениям и затем по известным правилам от постулированного переходят к фундаментальным уравнениям.

1.5.1. Уравнения Эйнштейна

I. При создании общей теории относительности важно было найти зависимость искривленности пространства-времени от распределения и свойств находящейся в нем материи, что было сделано на рубеже 1915 и 1916 годов открытием уравнений Эйнштейна. Искомые уравнения должны были связать геометрические величины и физические характеристики материи. Уже из ньютоновой теории гравитации следует, что в качестве источника гравитации следует выбирать величину, содержащую плотность или массу материи. После создания специальной теории относительности стало ясно, что искомая характеристика материи должна содержать скорость и — более того — она должна быть тензорной величиной. Вектор фактически уже занят в электродинамике, где во второй паре уравнений Максвелла справа записывается ток. Следующим кандидатом на роль источника искривления был тензор энергии-импульса материи $T_{\alpha\beta}$. Это предположение оказалось правильным.

Какую геометрическую величину нужно соотнести с $T_{\alpha\beta}$? Эта величина должна обладать таким же важным свойством, что и $T_{\alpha\beta}$:

$$T_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0, \quad (1.5.1)$$

являющимся обобщением известного в плоском пространстве-времени (в декартовых координатах) соотношения $\partial T^{\alpha\beta} / \partial x^\beta = 0$, приводящего к закону сохранения энергии-импульса материи.

II. Такую геометрическую величину можно получить сверткой тождеств Бианки (1.4.7) по индексам α , μ и умножением их на $g^{\beta\nu}$:

$$\begin{aligned} g^{\beta\nu} (R_{\beta\alpha\nu;\sigma}^\alpha + R_{\beta\sigma\alpha;\nu}^\alpha + R_{\beta\nu\sigma;\alpha}^\alpha) &= 0 \rightarrow R_{;\sigma} - R_{\sigma;\beta}^\beta - R_{\sigma;\alpha}^\alpha = 0 \rightarrow \\ \rightarrow R_{\sigma;\alpha}^\alpha - \frac{R_{;\sigma}}{2} &= 0 \rightarrow \nabla_\beta \left(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R \right) = 0. \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

III. Приравнявая друг другу физическую и геометрическую характеристики из соотношений (1.5.1) и (II) (с неким размерным коэффициентом), приходим к уравнениям Эйнштейна

$$R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R = \kappa T^{\alpha\beta}, \quad (1.5.3)$$

где κ — эйнштейновская гравитационная постоянная, связанная с ньютоновой гравитационной постоянной G соотношением

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}. \quad (1.5.4)$$

Умножая внутренним образом (1.5.3) на $g_{\alpha\beta}$, находим соотношение $-R = \kappa T$, которое позволяет переписать уравнения Эйнштейна в ином виде

$$R^{\alpha\beta} = \kappa \left(T^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} T \right). \quad (1.5.5)$$

Для пустого пространства-времени уравнения Эйнштейна упрощаются:

$$R_{\alpha\beta} = 0. \quad (1.5.6)$$

IV. Если быть до конца последовательными, то нужно учитывать, что ковариантная дивергенция обращается в нуль еще от одной геометрической величины: $g_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0$, поэтому уравнения Эйнштейна можно обобщить:

$$R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R + \Lambda g^{\alpha\beta} = \kappa T^{\alpha\beta}, \quad (1.5.7)$$

где коэффициент Λ называют *космологической постоянной*. Раньше часто полагали $\Lambda = 0$, однако последние астрофизические данные свидетельствуют в пользу учета космологической постоянной в уравнениях Эйнштейна.

V. Общий вид тензора энергии-импульса материальной среды записывается следующим образом

$$T^{\alpha\beta} = (p + \rho c^2) u^\alpha u^\beta - p g^{\alpha\beta}, \quad (1.5.8)$$

где p — давление, ρ — плотность, u^α — 4-скорость движения среды, c — скорость света. Для конкретных физических полей вид тензора энергии-импульса будет приводиться по мере их введения.

VI. Сделаем несколько замечаний по смыслу уравнений Эйнштейна.

- Уравнения Эйнштейна приобретают смысл в вакууме лишь начиная с размерности четыре и выше, так как при меньших размерностях, вследствие алгебраических соотношений (1.4.11) и (1.4.12),

из равенства нулю тензора Риччи автоматически следует обращение в нуль и тензора Римана—Кристоффеля, т. е. пространство-время становится плоским. Это явилось одной из причин неосуществимости далеко идущих идей Клиффорда о геометризации физики вплоть до создания специальной теории относительности, т. е. до того как пространство и время были объединены в 4-мерное многообразие.

• Поскольку при переходе к ньютоновой теории тяготения основной вклад дает компонента $g_{00}(\mathbf{x})$, соответствующая скалярному потенциалу $\varphi(\mathbf{x})$ гравитационного поля, можно показать, что из уравнений Эйнштейна в основном приближении получается уравнение Пуассона для ньютонова потенциала

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = \kappa T_{\alpha\beta} \quad \rightarrow \quad \Delta\varphi = 4\pi G\rho, \quad (1.5.9)$$

где ρ — плотность распределения материи, а Δ — обозначает 3-мерный лапласиан. Значение эйнштейновской гравитационной постоянной (1.5.4) находится из указанного принципа соответствия.

• Под компактной записью уравнений (1.5.3) (или (1.5.5)) кроется сложная система из 10 нелинейных дифференциальных уравнений (в частных производных) второго порядка относительно 10 компонент $g_{\mu\nu}$. Однако вследствие четырех тождеств Бианки (1.4.7) из 10 уравнений Эйнштейна независимыми являются только шесть. Поэтому для нахождения 10 компонент метрического тензора следует использовать *четыре дополнительных необщековариантных (координатных) условия*

$$f_{(a)}(g_{\mu\nu}, x^\lambda) = 0. \quad (1.5.10)$$

В качестве примера приведем *гармонические координатные условия*, называемые также координатами условиями де Дондера или Фока, задаются четырьмя соотношениями:

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})}{\partial x^\nu} = 0. \quad (1.5.11)$$

Их можно представить также в другом, эквивалентном виде

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu g^{\alpha\beta} \equiv \Gamma^\mu = 0. \quad (1.5.12)$$

Гармонические координатные условия примечательны тем, что в этих координатах даламбертиан от скалярной функции существенно упрощаются, однако В. А. Фок полагал, что за ними кроется более глубокий смысл.

1.5.2. Уравнения Максвелла

Еще раз напомним, что в рамках 4-мерной общей теории относительности тензорные величины описывают как геометрические, так и физические понятия. К последним относят как вещество (материальные частицы), так и поля, переносящие негравитационные взаимодействия между частицами. Особую значимость среди последних имеет электромагнитное поле, которое, — подобно гравитационному взаимодействию, — медленно убывает с расстоянием. Это побудило обсуждение далеко идущих аналогий между гравитацией и электромагнетизмом, желание их описывать схожим образом. Однако между ними имеется принципиальная разница: гравитационное взаимодействие геометризовано, а электромагнитное — нет, что обусловило два направления исследований.

Первое направление исходит из принципиальной возможности геометризации также электромагнитного поля посредством некоего обобщения геометрии, используемой в эйнштейновской теории гравитации, что привело бы к объединению гравитации. При таком подходе эйнштейновскую общую теорию относительности следует рассматривать лишь как первый шаг, геометризацию электромагнитного поля — как второй шаг на пути геометризации всех полей переносчиков взаимодействий. Именно так понимал дальнейшее развитие общей теории относительности сам А. Эйнштейн.

Другое направление исследований нацелено на переформулировку общей теории относительности таким образом, чтобы она оказалась наиболее близкой теории электромагнитного поля. В какой-то степени этот подход можно интерпретировать как попытку рассмотрения двух видов взаимодействий на *единой основе, соответствующей физическому электромагнитному полю*.

Выпишем ключевые понятия (негеометризованной) теории электромагнитного поля в искривленном пространстве-времени.

1. Электромагнитное поле описывается *векторным потенциалом* A_μ , определенным с точностью до калибровочных (градиентных)

преобразований

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{\partial f}{\partial x^\mu}, \quad (1.5.13)$$

где $f(x)$ — некоторая скалярная функция координат.

Инвариантный относительно калибровочных преобразований тензор электромагнитной напряженности $F_{\mu\nu}$ записывается одинаково как в плоском, так и в искривленном пространстве-времени

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}. \quad (1.5.14)$$

II. Первая пара уравнений Максвелла также записывается одинаково как в плоском, так и в искривленном пространстве-времени:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} = 0. \quad (1.5.15)$$

При учете определения (1.5.14) эти уравнения превращаются в тождества.

III. Вторая пара уравнений Максвелла в искривленном пространстве-времени имеет вид

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g} F^{\mu\nu})}{\partial x^\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu, \quad (1.5.16)$$

где j^μ — плотность тока заряженной материи.

IV. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля, помещаемый в правую часть уравнений Эйнштейна, имеет вид

$$T_{(A)}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \left(F^\mu_\alpha F^{\nu\alpha} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right). \quad (1.5.17)$$

Отсюда следует, что уравнения Эйнштейна для *электровакуума*, т. е. в присутствии лишь электромагнитного поля, представляются в виде

$$R_{\mu\nu} = -\frac{2G}{c^4} \left(F_{\mu\alpha} F^\alpha_\nu - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right). \quad (1.5.18)$$

Здесь учтено, что для электровакуума $R = 0$.

V. Взаимодействие заряженных частиц с электромагнитным полем описывается посредством замены частных производных на «удлиненные» производные

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{iq}{c\hbar} A_\mu, \quad (1.5.19)$$

где q — электрический заряд частицы.

1.5.3. Уравнение Клейна—Фока

В общей теории относительности скалярные поля также являются негеометрическими, т. е. учитываются в правой части уравнений Эйнштейна. Кратко приведем основные понятия теории скалярного поля в искривленном пространстве-времени.

I. В общепринятой теории простейший вариант скалярного поля φ удовлетворяет уравнению Клейна—Фока¹⁾

$$\begin{aligned} & \left[g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \varphi = \\ & = g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} \right) + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \varphi = 0. \end{aligned} \quad (1.5.20)$$

II. Простейший (канонический) вид тензора энергии-импульса для нейтрального скалярного поля имеет вид

$$T_{\mu\nu}^{(\varphi)} = \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} + \frac{g_{\mu\nu}}{2} \left[\left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \varphi^2 - g^{\alpha\beta} \varphi_{,\alpha} \varphi_{,\beta} \right]. \quad (1.5.21)$$

Таким образом, уравнения Эйнштейна в присутствии лишь скалярного поля записываются в виде

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \varkappa \left(\varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} + \frac{g_{\mu\nu}}{2} \left[\left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \varphi^2 - g^{\alpha\beta} \varphi_{,\alpha} \varphi_{,\beta} \right] \right). \quad (1.5.22)$$

¹⁾ В литературе это уравнение больше известно под названием уравнение Клейна—Гордона, однако В. А. Фоком оно было записано раньше, чем у Гордона. По этой причине ряд отечественных авторов это уравнение называют уравнением Клейна—Фока.

III. Сделаем несколько замечаний по теории скалярного поля в искривленном пространстве-времени.

- Скалярное поле в физике выступает как вспомогательное, упрощенное поле, дублирующее в некоем приближении физические поля иной тензорной (или спинорной) размерности.

- При введении скалярного поля из различных физических соображений, как правило, получаются более общие уравнения со слагаемым, содержащим скалярную кривизну R :

$$\left[g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 + aR \right] \varphi = 0, \quad (1.5.23)$$

где a — некоторая константа. Ее значение зависит от способа получения этого уравнения или других соображений: $a = -1/4$ — при получении уравнения Клейна—Фока квадрированием уравнений Дирака в искривленном пространстве-времени; $a = -1/3$ — при выводе уравнения Клейна—Фока на основе фейнмановского суммирования по историям в ОТО; $a = -1/6$ — при требовании конформной инвариантности (см. ниже) уравнений для безмассового скалярного поля.

- В литературе можно найти более сложные, нежели (1.5.21), выражения для тензора энергии-импульса скалярного поля. Особенно это относится к случаям заряженных скалярных полей.

1.5.4. Объединение уравнений Эйнштейна, Максвелла и Клейна—Фока в рамках 5-мерия (предварительные замечания)

Как уже отмечалось, рядом авторов предпринимались попытки геометризации электромагнитного поля в рамках 4-мерной обобщенной геометрии, однако наиболее естественным оказался способ, открытый Т. Калуцей. Он основан на использовании римановой геометрии в 5-мерном пространстве-времени. Т. Калуца обнаружил, что если увеличить размерность пространства на единицу, то в обобщенной таким образом теории Эйнштейна возникают дополнительные степени свободы, которые можно использовать для описания электромагнитного поля. Поясним идею Калуцы.

I. Согласно общим принципам римановой геометрии, в 5-мерном многообразии вместо квадрата 4-мерного интервала ds^2 следует взять 5-мерный интервал

$$dI^2 = G_{AB} dx^A dx^B, \quad (1.5.24)$$

где индексы A и B принимают значения: 0, 1, 2, 3, 5. (Пока индекс 4 пропустим — он будет использован при изложении варианта 5-мерия Клейна—Фока.) Компоненты 5-мерного метрического тензора G_{AB} образуют квадратную 5×5 -матрицу, в общем случае имеющую 15 различных компонент:

$$G_{AB} = \left(\begin{array}{ccccc|c} G_{00} & G_{01} & G_{02} & G_{03} & G_{05} & \\ G_{10} & G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{15} & \\ G_{20} & G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{25} & \\ G_{30} & G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{35} & \\ \hline G_{50} & G_{51} & G_{52} & G_{53} & G_{55} & \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{c|c} G_{\mu\nu} & G_{\mu 5} \\ \hline G_{5\nu} & G_{55} \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} g_{\mu\nu} & A_\mu \\ \hline A_\nu & G_{55} \end{array} \right). \quad (1.5.25)$$

Здесь греческие индексы μ и ν по-прежнему принимают четыре значения: 0, 1, 2, 3. Калуца показал, что компонентами G_{AB} можно распорядиться следующим образом: десять компонент $G_{\mu\nu}$ (точнее, десять комбинаций из них) следует сопоставить с компонентами $g_{\mu\nu}$ эйнштейновской ОТО; четыре компонента $G_{\mu 5}$ можно связать с четырьмя компонентами электромагнитного векторного потенциала A_μ , и остается еще одна, «лишняя», пятнадцатая компонента G_{55} , которая, в принципе, может описывать какое-то новое скалярное поле.

II. Данная трактовка компонент 5-мерной метрики вызывает множество вопросов. Они возникли и у Эйнштейна, когда в 1919 году Калуца прислал ему на отзыв свою статью. В своем письме к Калуце от 21 апреля 1919 года Эйнштейн писал: «Мысль, что электрическое поле является „искащенной“ величиной... также часто и настойчиво преследовала меня. Однако мне никогда не приходило в голову, что это можно получить в 5-мерном цилиндрическом мире; такая идея выглядит совершенно новой. Ваша мысль с первого взгляда очень понравилась мне... Если при более детальном чтении

у меня не появится серьезных возражений, я буду рад представить Вашу работу в здешней Академии».

Это высказывание Эйнштейна следует пояснить. Как известно, в теории Максвелла компоненты A_μ образуют тензор напряженности $F_{\mu\nu}$ согласно формуле (1.5.14). В искривленном (римановом) пространстве-времени своеобразным аналогом напряженности являются символы Кристоффеля:

$$F_{\mu\nu} \leftrightarrow \Gamma_{AC,B} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G_{AB}}{\partial x^C} + \frac{\partial G_{BC}}{\partial x^A} - \frac{\partial G_{AC}}{\partial x^B} \right). \quad (1.5.26)$$

Пусть один из индексов (скажем, C) равен 5, а остальные — принимающими 4-мерные значения. Кроме того, постулируем, что компоненты G_{AB} не зависят от 5-й координаты (это так называемое условие цилиндричности по x^5). При сопоставлении с (1.5.14) имеем

$$\Gamma_{\mu 5, \nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial x^5} + \frac{\partial G_{\nu 5}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial G_{\mu 5}}{\partial x^\nu} \right) \rightarrow \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} = F_{\mu\nu}, \quad (1.5.27)$$

то есть компоненты тензора напряженности электромагнитного поля оказались «искаженными» компонентами 5-мерного символа Кристоффеля.

Таким образом, дополнительное, пятое измерение проявляется в виде смешанных компонент 5-мерного метрического тензора $G_{\mu 5}$ и компонент 5-мерного символа Кристоффеля.

III. Забегая вперед, отметим, что 5-мерная теория гравитации и электромагнетизма Калуцы обладает рядом несомненных достоинств. В литературе их иногда называют «чудесами» теории Калуцы. Они будут названы в главе 6.

Контрольные задания

1. Записать уравнение Клейна—Фока (I) в гармонической координатной системе.
2. Показать, что уравнение Клейна—Фока (I) для безмассового скалярного поля является конформно инвариантным при значении константы $\alpha = -1/6$, если функция φ при преобразованиях (1.4.14) изменяется по закону $\tilde{\varphi} = e^{-\sigma} \varphi$.
3. Показать, что вторая пара уравнений Максвелла (1.5.16) в вакууме в 4-мерном пространстве-времени конформно инвариантна, если при конформных преобразованиях метрики ковариантные компоненты векторного потенциала не изменяются.

§ 1.6. Параллельный перенос и геометрии Схоутена

Взглянем на введенные понятия римановой геометрии с позиций самых общих дифференциальных геометрий. Отметим, что дифференциальные геометрии опираются на следующие три фактора: на метрику, понятие параллельного переноса и топологию. О метрике уже было сказано выше. Здесь рассмотрим в наиболее общем виде понятие параллельного переноса смещений или тензорных величин.

1.6.1. Параллельный перенос

I. В самом общем случае параллельный перенос малого смещения AB с компонентами δx^μ из точки A в близкую точку C (вдоль малого смещения AC с компонентами dx^μ) приводит к новому смещению CD с компонентами (см. рис. 1.4)

$$\delta \tilde{x}^\mu = \delta x^\mu - K_{\alpha\beta}^\mu dx^\alpha \delta x^\beta, \quad (1.6.1)$$

где $K_{\alpha\beta}^\mu$ — коэффициенты связности, зависящие от координат.

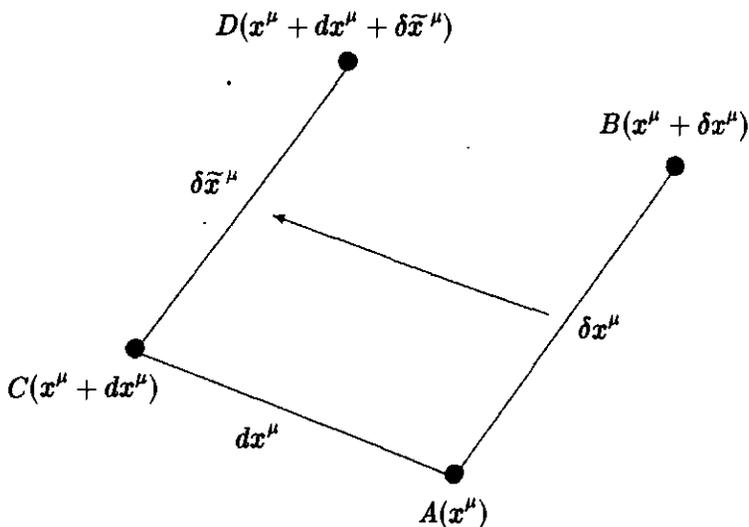


Рис. 1.4. Параллельный перенос одного малого смещения вдоль другого

II. Определим длину результирующего смещения CD

$$(ds^2)_{(CD)} = g_{\mu\nu}(C) \delta \tilde{x}^\mu \delta \tilde{x}^\nu. \quad (1.6.2)$$

Используя определение (1.6.1) и разлагая $g_{\mu\nu}(C)$ в ряд Тейлора (с точностью до величин первого порядка малости включительно), имеем

$$\begin{aligned} (ds^2)_{(CD)} &= \left(g_{\mu\nu}(A) + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} dx^\sigma \right) (\delta x^\mu - K_{\alpha\beta}^\mu dx^\alpha \delta x^\beta) \times \\ &\quad \times (\delta x^\nu - K_{\lambda\rho}^\nu dx^\lambda \delta x^\rho) \simeq (ds^2)_{(AB)} + \\ &\quad + \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - K_{\sigma\mu}^\lambda g_{\lambda\nu} - K_{\sigma\nu}^\lambda g_{\lambda\mu} \right) dx^\sigma \delta x^\mu \delta x^\nu \equiv \\ &\equiv (ds^2)_{(AB)} + g_{\mu\nu|\sigma} dx^\sigma \delta x^\mu \delta x^\nu, \end{aligned} \quad (1.6.3)$$

где $g_{\mu\nu|\sigma}$ обозначает ковариантную производную метрического тензора относительно обобщенных коэффициентов связности $K_{\alpha\beta}^\lambda$, заменяющих в (1.3.20) символы Кристоффеля. Таким образом, *обобщенная ковариантная производная от метрического тензора определяет изменение длины смещения при параллельном переносе:*

$$(ds^2)_{(CD)} - (ds^2)_{(AB)} = g_{\mu\nu|\sigma} dx^\sigma \delta x^\mu \delta x^\nu \equiv Q_{\mu\nu\sigma} \delta x^\mu \delta x^\nu dx^\sigma. \quad (1.6.4)$$

III. Рассмотрим частный случай параллельного переноса (1.6.3), при котором сохраняется длина переносимого смещения, т. е. при выполнении условия

$$g_{\mu\nu|\sigma} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - K_{\sigma\mu,\nu} - K_{\sigma\nu,\mu} = 0. \quad (1.6.5)$$

Добавляя к этому соотношению еще два с соответствующим образом переставленными индексами и знаками, приходим к выражению, связывающему коэффициенты связности $K_{\mu\nu,\sigma}$ и символы Кристоффеля:

$$\Gamma_{\mu\nu,\sigma} = \frac{1}{2} [(K_{\nu\mu,\sigma} + K_{\mu\nu,\sigma}) + (K_{\nu\sigma,\mu} - K_{\sigma\nu,\mu}) + (K_{\mu\sigma,\nu} - K_{\sigma\mu,\nu})]. \quad (1.6.6)$$

Из (1.6.6) следует, что обобщенные коэффициенты связности совпадают с символами Кристоффеля, если они симметричны по нижней паре индексов.

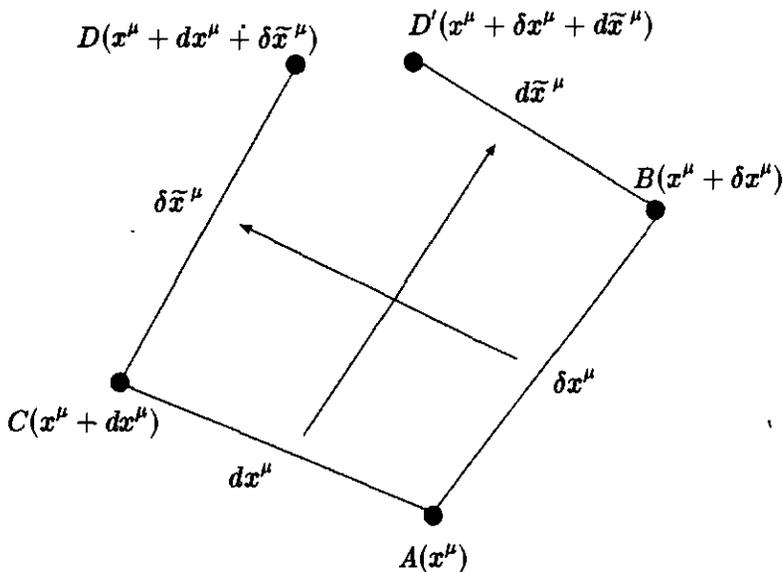


Рис. 1.5. Геометрический смысл тензора кручения

IV. Обсудим геометрический смысл антисимметричной части обобщенных коэффициентов связности. Для этого, внося соответствующие изменения в (1.6.1), параллельно перенесем малое смещение AC вдоль малого смещения AB согласно формуле

$$d\tilde{x}^\mu = dx^\mu - K_{\alpha\beta}^\mu \delta x^\alpha dx^\beta. \quad (1.6.7)$$

В итоге получим новое смещение BD' , где точка D' имеет координаты

$$D'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu + d\tilde{x}^\mu = x^\mu + \delta x^\mu + dx^\mu - K_{\alpha\beta}^\mu \delta x^\alpha dx^\beta, \quad (1.6.8)$$

где x^μ — координаты точки A (см. рис. 1.5). Учитывая, что координаты точки D , полученной в результате первого переноса, имеют значения:

$$D^\mu = x^\mu + dx^\mu + \delta x^\mu = x^\mu + dx^\mu + \delta x^\mu - K_{\alpha\beta}^\mu dx^\alpha \delta x^\beta, \quad (1.6.9)$$

находим компоненты малого смещения

$$D^\mu - D'^\mu = (K_{\alpha\beta}^\mu - K_{\beta\alpha}^\mu) dx^\beta \delta x^\alpha \equiv 2S_{\alpha\beta}^\mu dx^\beta \delta x^\alpha, \quad (1.6.10)$$

где, согласно строгой теореме частного, величина

$$S_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2}(K_{\alpha\beta}^{\mu} - K_{\beta\alpha}^{\mu}) \quad (1.6.11)$$

является тензором. Она называется *тензором кручения*. Как показано на рис. 1.5, *тензор кручения ответствен за нарушение правила параллелограмма* (во втором приближении по малым компонентам смещений).

V. К тензору кривизны, введенному ранее коммутацией вторых ковариантных производных, можно прийти другим путем, рассматривая параллельный перенос произвольного вектора (тензора) по замкнутому контуру. Параллельно перенося произвольный тензор $B_{\mu\nu\dots}^{\alpha\beta\dots}$ из произвольной точки A в точку D вдоль различных сторон параллелограмма (см. рис. 1.6), можно убедиться в том, что тензор Римана—Кристоффеля определяет разность компонент тен-

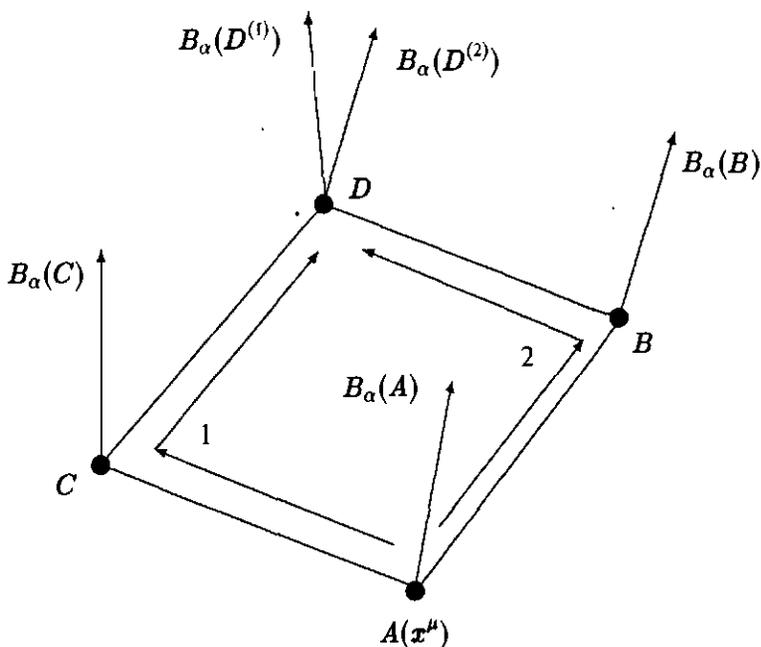


Рис. 1.6. Введение тензора кривизны посредством параллельного переноса вектора (тензора) по замкнутому контуру

зоров, перенесенных из одной точки в другую (близкую) двумя разными путями:

$$\Delta B_{\mu\nu\dots}^{\alpha\beta\dots}(D) = -\frac{1}{2}R_{\lambda\sigma\gamma}^{\alpha}B_{\mu\nu\dots}^{\lambda\beta\dots}ds^{\sigma\gamma} - \dots + \frac{1}{2}R_{\mu\sigma\gamma}^{\lambda}B_{\lambda\nu\dots}^{\alpha\beta\dots}ds^{\sigma\gamma} + \dots, \quad (1.6.12)$$

где

$$ds^{\sigma\gamma} = dx^{\sigma}\delta x^{\gamma} - dx^{\gamma}\delta x^{\sigma}$$

— площадь параллелограмма ABCD. Равносильно утверждение, что тензор кривизны определяет разность компонент тензоров: исходного и получившегося в результате переноса по замкнутому контуру.

VI. Следует отметить, что в обобщенных дифференциальных геометриях тензор Римана—Кристоффеля записывается в стандартном виде через обобщенные коэффициенты связности. Это приводит к ряду интересных следствий. Назовем несколько из них.

- В геометриях с сегментарной кривизной нарушается свойство антисимметрии тензора Римана—Кристоффеля по первой паре индексов. Это означает наличие симметричной составляющей по первой паре индексов. При свертке тензора по эти индексам возникает антисимметричный тензор вида

$$\tilde{R}^{\mu}_{\mu\alpha\beta} = F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}, \quad (1.6.13)$$

представимый в форме (1.5.14), что позволило Эддингтону его трактовать как тензор напряженности электромагнитного поля.

- В дифференциальных геометриях с кручением имеется класс пространств с абсолютным параллелизмом. Они примечательны тем, что в них тензор кривизны Римана—Кристоффеля с замененными символами Кристоффеля на обобщенные коэффициенты связности равны нулю. При этом тензор кривизны, вычисленный через символы Кристоффеля, отличен от нуля, т. е. в них риманова кривизна компенсируется кручением. Многими авторами, в том числе и самим Эйнштейном, геометрии с абсолютным параллелизмом подробно анализировались с целью поиска их возможных физических приложений.

1.6.2. Геометрии Схоутена и их применения в физике

I. Названные выше обобщения римановой геометрии неоднократно анализировались в XX веке. Основными побудительными мотивами для этого были следующие.

- Как Эйнштейну, так и другим исследователям, было ясно, что общая теория относительности не полна в том смысле, что в ее рамках удалось геометризовать лишь гравитационное взаимодействие. Остро ощущалась необходимость геометризации, по крайней мере, еще одного взаимодействия, медленно убывающего с расстоянием, — электромагнитного. В работах такого рода главное внимание уделялось введению геометрического векторного поля, которое можно было бы отождествить с электромагнитным векторным потенциалом.

- Независимо от задачи геометризации электромагнетизма, успех в геометризации гравитации побудил многих исследований к поиску физических проявлений более общих дифференциальных геометрий.

- В течение всего XX века предпринимались настойчивые попытки преодолеть ряд «трудностей» общей теории относительности, таких как нетензорный характер символов Кристоффеля, отсутствия законов сохранения, критериев гравитационных волн и т. д. Поскольку в рамках стандартной формулировки общей теории относительности этого не удавалось сделать, исследовались обобщенные теории гравитации на основе геометрий Схоутена.

II. Данное направление исследований началось с работ Г. Вейля (см. [11]), который, пытаясь геометризовать электромагнетизм, открыл первый вид неримановой геометрии — так называемый *вырожденный* случай геометрии с неметричностью, где обобщенная ковариантная производная от метрического тензора представляется в виде произведения двух тензоров

$$Q_{\mu\nu\sigma} = 2g_{\mu\nu}A_{\sigma}. \quad (1.6.14)$$

Вектор A_{μ} было предложено отождествить (через размерный коэффициент) с векторным потенциалом электромагнитного поля. Легко видеть, что в теории Вейля коэффициенты связности представляются в виде

$$K_{\mu\nu,\sigma} = \Gamma_{\mu\nu,\sigma} + g_{\mu\nu}A_{\sigma} - g_{\mu\sigma}A_{\nu} - g_{\nu\sigma}A_{\mu}. \quad (1.6.15)$$

III. Вскоре А. С. Эддингтоном [13] было показано, что в целях геометризации электромагнетизма можно использовать общий случай геометрии с сегментарной кривизной, когда коэффициенты связности представляются в виде

$$K_{\mu\nu,\sigma} = \Gamma_{\mu\nu,\sigma} + \frac{1}{2}(Q_{\mu\nu\sigma} - Q_{\mu\sigma\nu} - Q_{\nu\sigma\mu}). \quad (1.6.16)$$

Тензор напряженности электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$, отсутствовавший в римановой геометрии, было предложено определить в виде:

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial K_{\beta\mu}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial K_{\alpha\mu}^{\mu}}{\partial x^{\beta}} \equiv \frac{\partial A_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}, \quad (1.6.17)$$

где введена величина, по замыслу автора соответствующая электромагнитному векторному потенциалу,

$$A_{\alpha} = K_{\alpha\mu}^{\mu} = \Gamma_{\alpha\mu}^{\mu} - Q_{\alpha\mu}^{\mu}. \quad (1.6.18)$$

Легко видеть, что так определенная величина A_{α} не является вектором, тогда как величина (1.6.17) является антисимметричным тензором второго ранга.

Отметим, что названные варианты «единых геометрических теорий гравитации и электромагнетизма» не выдержали испытания временем²⁾ по нескольким причинам. Среди них назывались трудности с определением тензора энергии-импульса электромагнитного поля, затруднения с введением силы Лоренца в уравнения движения заряженных частиц и другие.

IV. Геометрия с кручением была открыта Э. Картаном (см. [11]) в начале 20-х годов XX века. Она явилась вторым видом (после геометрии Вейля) неримановой геометрии. Частные случаи пространств с кручением исследовались не только с целью геометризации электромагнетизма, но и в поиске новых эффектов геометрического происхождения. В отсутствие сегментарной кривизны обобщенная

²⁾ В течение более 10 лет Эйнштейн колебался, какой вариант обобщений своей теории предпочесть: 4-мерную обобщенную (нериманову) геометрию с неметричностью или остаться в рамках римановой геометрии, но увеличить ее размерность до пяти, как предлагал Т. Калуца.

связность следующим образом записывается через символы Кристоффеля и тензор кручения:

$$K_{\mu\nu}^{\sigma} = \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} + S_{\mu\nu}^{\sigma} + S_{\nu,\mu}^{\sigma} + S_{\cdot,\mu,\nu}^{\sigma}. \quad (1.6.19)$$

В серии работ Финкельштейна предлагалась единая геометрическая теория поля на основе пространств с кручением. В частности, в этой теории в качестве электромагнитного векторного потенциала (с точностью до размерного коэффициента, пропорционального электрическому заряду) предлагалось рассматривать величину

$$2eA_{\sigma} = K_{\mu\sigma}^{\mu} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\mu} = 2S_{\mu\sigma}^{\mu}. \quad (1.6.20)$$

Как уже отмечалось, Эйнштейн в последние годы жизни исследовал *геометрию с несимметричной метрикой*, где антисимметричную часть метрики предполагалось связать с тензором напряженности электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$. Такую теорию можно понимать как специальный случай геометрии с кручением, примыкающей к вариантам теорий Финкельштейна.

V. Опираясь на найденные обобщения геометрии Римана, в конце 20-х годов XX века Я. А. Схоутен проанализировал дифференциальные геометрии, удовлетворяющие ряду естественных условий, и показал, что в самом общем случае такие геометрии характеризуются тремя и только тремя тензорами — «схоутенами»:

- 1) ковариантной производной от метрического тензора из (1.6.3), называемой *тензором неметричности* или *сегментарной кривизной*;
- 2) тензором кручения $S_{\alpha\beta}^{\mu}$, определенным в (1.6.11);
- 3) разностью обобщенных коэффициентов связности для переноса ко- и контравариантных величин

$$W_{\alpha\beta}^{\mu} = K_{\alpha\beta}^{\mu} - \bar{K}_{\alpha\beta}^{\mu}, \quad (1.6.21)$$

где $\bar{K}_{\alpha\beta}^{\mu}$ — коэффициенты связности параллельного переноса ковариантных величин. Дело в том, что в обобщенных дифференциальных геометриях ко- и контравариантные величины могут переноситься с помощью различных коэффициентов связности.

Каждый из трех схоутенгов может быть либо нулевым, либо вырожденным, т. е. представимым в виде произведения тензора на вектор, либо произвольным, — в итоге приходим к выводу, что может быть

$$3^3 = 27$$

типов дифференциальных геометрий. В общей теории относительности используется самый простой тип — римановой геометрии, — где все три схоутена принимают нулевые значения.

VI. Сделаем ряд замечаний по использованию в физике геометрий Схоутена.

- В литературе обсуждались многочисленные комбинации из названных частных случаев обобщенных геометрий, в частности, теории с неметричностью и кручением, квадратичные теории с кручением, с неметричностью и т. д.

- Автору неизвестны достаточно развитые варианты физико-геометрических теорий, в которых бы использовался третий схоутеновский тензор. Видимо, это связано с ключевым характером метрического тензора в теории. При его наличии нет нужды отдельно вводить разные коэффициенты связности для переноса (дифференцирования) ко- и контравариантных тензоров.

- Анализирувавшиеся физиками дифференциальные геометрии имеют дело с тремя типами изменений тензорных величин при параллельном переносе:

- 1) повороты (вращения) описываются римановой геометрией;
- 2) деформации (изменения длин) описываются геометрией с сегментарной кривизной;
- 3) своеобразные трансляции (сдвиги), проявляющиеся при нарушении правила параллелограмма, описываются геометрией с кручением.

- Особо подчеркнем тот факт, что все названные обобщенные геометрические теории нельзя рассматривать как альтернативные теории гравитации, как иногда это делают, а они являются обобщениями именно эйнштейновской теории, которая содержится как некое универсальное неизменное ядро во всех обобщенных геометрических теориях.

Контрольные задания

1. Показать, что в геометрии Эддингтона со связностью вида (1.6.16) имеет место соотношение

$$\tilde{R}_{\mu\alpha\beta}^{\mu} = F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}, \quad (1.6.22)$$

где $F_{\alpha\beta}$ определено в (1.6.7).

2. Записать скалярную кривизну в теории Вейля, где связность имеет вид (1.6.15).
3. Записать скалярную кривизну в геометрии с кручением, где связность имеет вид (1.6.19).

Глава 2

Пространство-время вблизи гравитирующих источников

Найдем физически наиболее важные решения уравнений Эйнштейна и обсудим главные следствия классической теории гравитации.

§ 2.1. Метрика Шварцшильда

Начнем с рассмотрения наиболее существенного решения уравнений Эйнштейна — с метрики пространства-времени, создаваемой компактным сферически симметричным материальным объектом. Именно эта метрика, называемая метрикой Шварцшильда, с достаточно высокой степенью точности описывает пространство-время в Солнечной системе и в окрестности Земли. Из нее в основном приближении выводится закон всемирного тяготения Ньютона, а в следующем приближении вычисляются известные эффекты, подтверждающие общую теорию относительности.

2.1.1. Уравнения Эйнштейна для сферически симметричной метрики

Будем искать решение вне распределения материи, т. е. будем полагать, что в правой части уравнений Эйнштейна (1.5.5) стоит нуль. Это означает, что уравнения Эйнштейна берутся в виде

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (2.1.1)$$

Квадрат интервала в пространстве-времени Минковского в сферических координатах имеет вид

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (2.1.2)$$

Переобозначим координаты:

$$ct = x^0; \quad r = x^1; \quad \theta = x^2; \quad \varphi = x^3. \quad (2.1.3)$$

Условие сферической симметрии в упрощенной форме будем понимать как присутствие угловых координат лишь в виде комбинации, заключенной в (2.1.2) в круглых скобках. Тогда в случае общей теории относительности квадрат интервала следует ожидать в виде

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + g_{11}(dx^1)^2 + 2g_{01} dx^0 dx^1 - f(x^0, r)r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (2.1.4)$$

где g_{00} , g_{11} , g_{01} и $f(x^0, r)$ — четыре функции от двух координат x^0 и $r \equiv x^1$.

Воспользуемся возможностью преобразований двух координат

$$x'^0 = x'^0(x^0, r); \quad r' = r'(x^0, r), \quad (2.1.5)$$

сохраняющих вид метрики (2.1.4), таким образом, чтобы исключить две неизвестные функции, приведя их к виду

$$g'_{01} = 0; \quad f(x'^0, r') = 1. \quad (2.1.6)$$

В итоге остаются две неизвестные компоненты метрического тензора, которые для удобства дальнейших выкладок переобозначим

$$g'_{00} = e^\nu; \quad g'_{11} = -e^\lambda, \quad (2.1.7)$$

где $\nu(x^0, r)$ и $\lambda(x^0, r)$ — две новые неизвестные функции от двух переменных, которые предстоит найти из уравнений Эйнштейна. (Далее штрихи у новых компонент писать не будем.) Проведенные рассуждения фактически включают в себя задание координатных условий, которые всегда необходимо добавлять к уравнениям Эйнштейна.

Для решения уравнений Эйнштейна используем обычный путь, который состоит из следующих пяти этапов:

- 1) из тех или иных соображений задается ожидаемый вид ковариантных компонент метрического тензора;
- 2) из ковариантных компонент метрического тензора выражаются контравариантные компоненты;

- 3) находятся компоненты символов Кристоффеля через неизвестные функции;
- 4) записываются компоненты тензора Риччи;
- 5) решается система уравнений Эйнштейна.

I. Первый этап уже осуществлен выше. Компоненты ковариантного метрического тензора ищутся в виде

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (2.1.8)$$

II. По формулам (1.2.9) из этих компонент находятся контравариантные компоненты метрического тензора в виде

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/(r^2 \sin^2 \theta) \end{pmatrix}. \quad (2.1.9)$$

III. Сорок компонент символов Кристоффеля, записываемых через компоненты метрики посредством формулы (1.3.8), будем вычислять в четыре приема.

- 1) Сначала найдем четыре компоненты, обладающие одинаковыми индексами. Они представляются в форме

$$\Gamma_{\mu\mu}^\mu = \frac{g^{\mu\mu}}{2} \cdot \frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x^\mu} \quad (2.1.10)$$

(без суммирования по одинаковым индексам) и имеют следующие значения:

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{\dot{\nu}}{2}; \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{\lambda'}{2}; \quad \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{33}^3 = 0, \quad (2.1.11)$$

где точкой будем обозначать производную по x^0 , а штрихом — производную по r .

- 2) 12 компонент символов Кристоффеля с одинаковыми нижними индексами представляются в форме

$$\Gamma_{\mu\mu}^{\sigma} = -\frac{g^{\sigma\sigma}}{2} \cdot \frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x^{\sigma}} \quad \text{при } \mu \neq \sigma \quad (2.1.12)$$

и находятся в виде

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu}; & \Gamma_{00}^1 &= \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda}; & \Gamma_{22}^1 &= -r e^{-\lambda}; \\ \Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2 \theta e^{-\lambda}; & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta; \\ \Gamma_{22}^0 &= \Gamma_{33}^0 = \Gamma_{00}^2 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{00}^3 = \Gamma_{11}^3 = \Gamma_{22}^3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.1.13)$$

- 3) 12 компонент символов Кристоффеля с одинаковыми одним верхним и одним нижним индексами представляются в форме

$$\Gamma_{\mu\sigma}^{\sigma} = \frac{g^{\sigma\sigma}}{2} \cdot \frac{\partial g_{\sigma\sigma}}{\partial x^{\mu}} \quad \text{при } \mu \neq \sigma \quad (2.1.14)$$

и находятся в виде

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{01}^1 &= \frac{\dot{\lambda}}{2}; & \Gamma_{10}^0 &= \frac{\nu'}{2}; & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}; & \Gamma_{23}^3 &= \text{ctg} \theta; \\ \Gamma_{02}^2 &= \Gamma_{03}^3 = \Gamma_{02}^0 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{03}^0 = \Gamma_{13}^1 = \Gamma_{23}^2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.1.15)$$

- 4) 12 компонент символов Кристоффеля со всеми разными индексами в данной метрике равны нулю:

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = 0 \quad \text{при } \mu \neq \nu \neq \lambda. \quad (2.1.16)$$

IV. Отличные от тождественного нуля компоненты тензора Риччи, приравненные нулю согласно (2.1.1), находятся в виде:

$$R_{00} = e^{\nu-\lambda} \left(\frac{\nu''}{2} + \frac{(\nu')^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r} \right) + \frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{4} - \frac{\ddot{\lambda}}{2} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} = 0; \quad (2.1.17)$$

$$R_{11} = - \left(\frac{\nu''}{2} + \frac{(\nu')^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\lambda'}{r} \right) - e^{\lambda-\nu} \left(\frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{4} - \frac{\ddot{\lambda}}{2} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} \right) = 0; \quad (2.1.18)$$

$$R_{22} = \frac{R_{33}}{\sin^2 \theta} = e^{-\lambda} \left(-1 + \frac{r}{2} (\lambda' - \nu') \right) + 1 = 0; \quad (2.1.19)$$

$$R_{01} = \frac{\dot{\lambda}}{r} = 0. \quad (2.1.20)$$

2.1.2. Вывод решения Шварцшильда

I. Решим получившиеся уравнения. Из (2.1.20) сразу же находим, что функция λ не зависит от x^0 , т. е.

$$\dot{\lambda} = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \lambda(r). \quad (2.1.21)$$

II. Умножая (2.1.17) на $e^{\lambda-\nu}$ и складывая с (2.1.18), находим

$$\lambda' + \nu' = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda + \nu = f(x^0) \quad \rightarrow \quad \nu = -\lambda + f(x^0), \quad (2.1.22)$$

где $f(x^0)$ — произвольная функция только от координаты x^0 . Используя это выражение, произведем преобразование координаты x^0 так, чтобы в первой части метрики (2.1.4) получилось

$$e^{-\lambda+f(x^0)}(dx^0)^2 = e^{-\lambda}(dx'^0)^2, \quad (2.1.23)$$

тогда, опуская штрих, имеем

$$\lambda + \nu = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda(r) = -\nu(r), \quad (2.1.24)$$

т. е. фактически доказана теорема, что *вакуумное сферически симметричное решение уравнений Эйнштейна является статическим*.

III. Вводя обозначение $y = e^\nu$, уравнение (2.1.19) можно привести к виду

$$y' + \frac{y}{r} - \frac{1}{r} = 0. \quad (2.1.25)$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Из него находим

$$\ln(1-y) = \ln C_0 - \ln r \quad \rightarrow \quad y = e^\nu = e^{-\lambda} = \left(1 - \frac{C_0}{r}\right), \quad (2.1.26)$$

где C_0 — константа интегрирования.

В итоге имеем решение

$$ds^2 = \left(1 - \frac{C_0}{r}\right) (dx^0)^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{C_0}{r}\right)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (2.1.27)$$

IV. Забегая вперед, укажем, что из принципа соответствия с теорией Ньютона (см. ниже) находится константа интегрирования в виде $C_0 = 2GM/c^2$, где G — ньютоновская гравитационная постоянная, c — скорость света, M — масса центрального объекта. В окончательном виде решение Шварцшильда имеет вид

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) (dx^0)^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (2.1.28)$$

2.1.3. Анализ метрики Шварцшильда

Обсудим некоторые принципиальные моменты метрики Шварцшильда.

I. Выделим пространственно-подобную часть метрики, т. е. положим $dx^0 = 0$, тогда можно писать $-ds^2 = dl^2$. Зафиксируем радиальную координату r , положив $dr = 0$, и рассмотрим смещение по окружности в экваториальной плоскости, т. е. пусть $\theta = 90^\circ$ и изменяться может лишь угол φ от нуля до 2π . В этом случае из (2.1.28) имеем выражения для малого смещения и полную длину окружности:

$$dl = r d\varphi \rightarrow l = 2\pi r. \quad (2.1.29)$$

Это очевидный результат, гласящий, что длина окружности, как и в евклидовом пространстве, выражается в виде произведения 2π на радиус. Однако в данном случае r является лишь радиальной координатой, которая при другом выборе координатной системы могла бы входить в длину окружности иным образом. По этой причине часто говорят, что метрика Шварцшильда в виде (2.1.28) записана в специальных *координатах кривизн*.

II. Теперь возьмем смещение вдоль радиальной координаты от какого-то начального значения r_1 до конечного r_2 при $\theta = 90^\circ$ и при постоянном значении угла φ . В этом случае из (2.1.28) имеем

$$dl = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}} \rightarrow l = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}} > (r_2 - r_1), \quad (2.1.30)$$

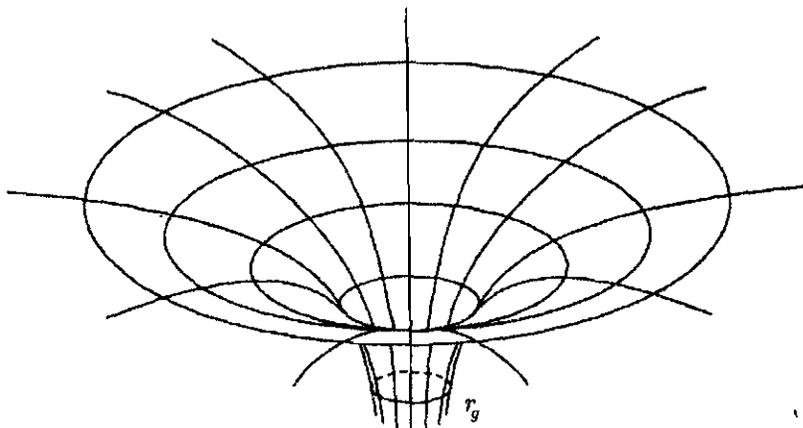


Рис. 2.1. Воронка, иллюстрирующая искривление пространства вокруг сферически симметричного материального источника

т. е. расстояние от источника до окружности длиной $2\pi r_2$ оказывается больше значения разности радиальных координат. Такую ситуацию можно понимать только таким образом, что пространство «прогибается» под материальным источником. С помощью доступной нашему воображению 2-мерной аналогии эту ситуацию можно изобразить в виде воронки на рис. 2.1.

III. Рассмотрим метрику Шварцшильда при очень малых значениях параметра r . Из (2.1.28) видно, что при значении радиальной координаты

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} \quad (2.1.31)$$

компонента метрики g_{00} обращается в нуль, а компонента g_{11} стремится к бесконечности. Это значение r_g называется *гравитационным радиусом*. Для Солнца он порядка 3 километров, а для Земли — порядка 9 миллиметров. При еще меньших значениях $r < r_g$ компонента g_{00} становится отрицательной, а компонента g_{11} — положительной. Это можно трактовать так, что координаты x^0 и $x^1 = r$ меняют свой характер: координата x^0 становится пространственно-подобной, а координата r — времени-подобной.

Для реальных объектов с геометрическими размерами, значительно превышающими гравитационный радиус, r_g имеет символи-

ческое значение — означает перевод значений масс в размерность длины.

IV. На основе записанных формул была высказана *гипотеза черных дыр* о возможности существования объектов с геометрическим радиусом, меньшим гравитационного. Вблизи таких объектов следует ожидать множество необычных явлений. Например, расчеты показывают, что из под гравитационного радиуса ничто не может выйти, — ни у света, ни у других тел просто не хватит энергии преодолеть притяжение черных дыр³⁾. По этой причине они должны быть невидимыми, «черными», — отсюда и их название.

Однако на черные дыры могут падать (пересекать гравитационный радиус извне) другие объекты, причем для стороннего наблюдателя скорость падающих на черную дыру объектов должна стремиться к скорости света, их масса при этом должна бесконечно расти, а сам процесс падения должен продолжаться бесконечно долго. Любопытно отметить, что в системе отсчета падающих объектов время достижения ими гравитационного радиуса оказывается конечным.

Ведутся эксперименты по обнаружению черных дыр в космосе, конечно, не по их собственному излучению (которого нет), а по косвенным эффектам. Поскольку падающие объекты разгоняются до околосветовых скоростей, то при их столкновениях можно ожидать жесткое рентгеновское излучение. Черные дыры идентифицируются с невидимыми в оптическом диапазоне источниками мощного рентгеновского излучения. В космосе обнаружено значительное количество претендентов на черные дыры, в том числе обсуждается вопрос о существовании гигантских черных дыр в центре нашей и других галактик.

³⁾ Заметим, что к данному выводу можно прийти в рамках ньютоновой теории тяготения с добавлением постулата предельной скорости, равной скорости света. Можно поставить задачу, на каком расстоянии r_g от точечной массы M тело с произвольной массой m , движущееся с максимальной скоростью $v = c$, обладает кинетической энергией, равной его потенциальной энергии? Из элементарных соотношений находим

$$\frac{mc^2}{2} - G \frac{mM}{r_g} = 0 \quad \rightarrow \quad r_g = \frac{2GM}{c^2}. \quad (2.1.32)$$

Однако имеется и другая позиция, соответствующая универсальному правилу в физике: *если в теории в каких-то областях или явлениях возникают бесконечно большие величины, то это свидетельство того, что в таких обстоятельствах выводы теории теряют силу*. По мнению, высказанному В. А. Фоком и рядом других физиков-гравитационистов, бесконечности на гравитационном радиусе свидетельствуют о границе применимости закономерностей эйнштейновской теории гравитации. Однако это не исключает возможности существования массивных астрофизических объектов загадочной природы, ныне трактуемых как черные дыры.

Контрольные задания

1. Показать, что в сферически симметричных метриках символы Кристоффеля со всеми различными символами равны нулю, т. е. что справедливы соотношения (2.1.16).
2. Используя выписанные значения компонент символов Кристоффеля, показать справедливость выражения (2.1.17) для компонент тензора Риччи R_{00} .
3. Показать, что координатная система, в которой записана метрика Шварцшильда

$$ds^2 = \frac{r - \frac{GM}{c^2}}{r + \frac{GM}{c^2}} (dx^0)^2 - \frac{r + \frac{GM}{c^2}}{r - \frac{GM}{c^2}} dr^2 - \left(r + \frac{GM}{c^2} \right) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (2.1.33)$$

является гармонической, т. е. удовлетворяет условиям (1.5.11).

4. Найти преобразования координат, переводящие метрику (2.1.28) (в координатах кривизн) в метрику вида (2.1.33).
5. Найти преобразования координат, переводящие метрику Шварцшильда (2.1.28) (в координатах кривизн) в изотропные координаты (где три пространственные координаты равноправны):

$$ds^2 = \frac{\left(1 - \frac{GM}{2c^2 r}\right)^2}{\left(1 + \frac{GM}{2c^2 r}\right)^2} (dx^0)^2 - \delta_{ik} \left(1 + \frac{GM}{2c^2 r}\right) dx^i dx^k. \quad (2.1.34)$$

§ 2.2. Уравнения геодезических линий в метрике Шварцшильда

Чтобы проанализировать соотношение ньютоновой теории гравитации и эйнштейновской общей теории относительности рассмотрим уравнения геодезических (1.3.7) в метрике Шварцшильда (2.1.28), полагая константу C_0 пока неизвестной. Последовательно выпишем и решим четыре уравнения, указывая аналоги в ньютоновой механике.

2.2.1. Угловые и времени-подобная компоненты

I. Начнем с компоненты $\mu = 2$, т. е. с уравнения для угла θ . Выбирая из (2.1.11)–(2.1.16) отличные от нуля компоненты символов Кристоффеля, имеем уравнение

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + 2\Gamma_{12}^2 \frac{dr}{ds} \frac{d\theta}{ds} + \Gamma_{33}^2 \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 0. \quad (2.2.1)$$

Подставляя найденные выше значения символов Кристоффеля, находим

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\theta}{ds} - \sin\theta \cos\theta \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 0. \quad (2.2.2)$$

Пусть в начальный момент рассматриваемое тело находилось в экваториальной «плоскости» и скорость тоже лежала в этой плоскости, т. е. пусть $\theta_0 = \pi/2$ и $(d\theta/ds)_0 = 0$, тогда из (2.1.34) следует, что и дальше движение тела будет происходить в этой «плоскости», т. е.

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = 0; \quad \frac{d\theta}{ds} = 0; \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2}. \quad (2.2.3)$$

Этот результат соответствует известному в ньютоновой теории факту, что траектория тела, движущегося в поле центральных сил, находится в одной плоскости — в плоскости Лапласа.

II. Далее рассмотрим компоненту $\mu = 3$, т. е. решим уравнение геодезической для угла φ , отличные от нуля слагаемые в котором имеют вид

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + 2\Gamma_{13}^3 \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds} + 2\Gamma_{23}^3 \frac{d\theta}{ds} \frac{d\varphi}{ds} = 0. \quad (2.2.4)$$

Подставляя сюда найденные выше компоненты символов Кристоффеля, имеем

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds} + 2 \operatorname{ctg} \theta \frac{d\theta}{ds} \frac{d\varphi}{ds} = 0. \quad (2.2.5)$$

Воспользовавшись (2.2.3), отбросим последнее слагаемое, кроме того, умножим все уравнение на ds/dr и введем обозначение $d\varphi/ds \equiv q(r)$, тогда приходим к уравнению с разделяющимися переменными

$$q' + \frac{2}{r}q = 0, \quad (2.2.6)$$

где штрих, как и ранее, означает дифференцирование по радиальной координате. Решение этого уравнения имеет вид

$$q = \frac{\sigma_0}{r^2} \rightarrow r^2 \frac{d\varphi}{ds} = \sigma_0, \quad (2.2.7)$$

где σ_0 — константа интегрирования.

В ньютоновой механике этой компоненте уравнений геодезической соответствует закон сохранения площадей (секторной скорости, момента количества движения)

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \sigma. \quad (2.2.8)$$

Опять имеется близкое соответствие двух теорий, причем следует положить

$$\sigma_0 = \frac{\sigma}{c}. \quad (2.2.9)$$

III. Уравнение геодезической для $\mu \approx 0$ имеет вид

$$\frac{d^2x^0}{ds^2} + 2\Gamma_{01}^0 \frac{dr}{ds} \frac{dx^0}{ds} = 0 \quad (2.2.10)$$

или через функцию $\nu(r)$ оно представляется в форме

$$\frac{d^2x^0}{ds^2} + \nu' \frac{dr}{ds} \frac{dx^0}{ds} = 0. \quad (2.2.11)$$

Умножая (2.3.11) на ds/dr и вводя обозначение $dx^0/ds \equiv p(r)$, получаем простое уравнение

$$p' + \nu' p = 0. \quad (2.2.12)$$

Его решение имеет вид

$$p = \frac{dx^0}{ds} = E_0 e^{-\nu} = \frac{E_0}{1 - \frac{C_0}{r}}, \quad (2.2.13)$$

где E_0 — константа интегрирования.

В ньютоновой механике этому соотношению соответствует закон сохранения энергии. При этом константа E_0 связана со значением полной энергии частицы (суммы кинетической и потенциальной энергий).

2.2.2. Радиальная компонента уравнений геодезических линий

I. Радиальная компонента геодезической ($\mu = 1$) имеет сложный вид

$$\frac{d^2 r}{ds^2} + \Gamma_{00}^1 \left(\frac{dx^0}{ds} \right)^2 + \Gamma_{11}^1 \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + \Gamma_{22}^1 \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 + \Gamma_{33}^1 \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = 0, \quad (2.2.14)$$

однако нам не нужно его решать, поскольку из метрики Шварцшильда легко находится его первый интеграл. Действительно, разделив (2.1.27) на ds^2 , имеем

$$1 = \left(1 - \frac{C_0}{r} \right) \left(\frac{dx^0}{ds} \right)^2 - \frac{1}{1 - \frac{C_0}{r}} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 - r^2 \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2. \quad (2.2.15)$$

II. Подставляя в (2.2.15) решения (2.2.7), (2.2.13) и перейдя, во-первых, от r к $u = 1/r$, и, во-вторых, от дифференцирования по ds к дифференцированию по $d\varphi$, используя формулы:

$$\frac{d}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} \frac{d}{d\varphi} = \sigma_0 u^2 \frac{d}{d\varphi}; \quad \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi}, \quad (2.2.16)$$

приходим к аналогу 1-й формулы Бине в механике Ньютона

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 = \frac{E_0^2 - 1}{\sigma_0^2} + \frac{C_0 u}{\sigma_0^2} + C_0 u^3. \quad (2.2.17)$$

III. Продифференцировав это выражение по φ , приходим к аналогу классической 2-й формулы Бине

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{C_0}{2\sigma_0^2} + \frac{3}{2}C_0u^2. \quad (2.2.18)$$

Напомним, что в классической механике 2-я формула Бине определяет радиальное ускорение через действующую на тело массы m центральную силу \mathcal{F}_r :

$$mu^2\sigma^2\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u\right) = -\mathcal{F}_r. \quad (2.2.19)$$

Подставляя сюда силу ньютонова притяжения $\mathcal{F}_r = -GmMu^2$, приходим к выражению

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = G\frac{M}{\sigma^2}, \quad (2.2.20)$$

где M — масса центрального объекта.

Из сравнения правой части (2.2.20) с первым слагаемым справа в (2.2.18) находим константу интегрирования C_0 , ранее введенную в метрику Шварцшильда (2.1.27):

$$C_0 = \frac{2GM}{c^2} \equiv r_g. \quad (2.2.21)$$

IV. Восстанавливая из (2.2.18) классический аналог 2-й формулы Бине (умножением на $mu^2\sigma^2$), приходим в случае общей теории относительности к обобщенной центральной «силе»:

$$mu^2\sigma^2\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u\right) = G\frac{mM}{r^2} + 3G\frac{mM}{r^4}\frac{\sigma^2}{c^2} \equiv \mathcal{F}_N + \mathcal{F}_E, \quad (2.2.22)$$

слагающейся из ньютоновой силы всемирного тяготения \mathcal{F}_N и дополнительной эйнштейновской «силы» \mathcal{F}_E , убывающей обратно пропорционально четвертой степени от расстояния.

Запишем отношение эйнштейновской «силы» к ньютоновой для нерелятивистского случая:

$$\frac{\mathcal{F}_E}{\mathcal{F}_N} = \frac{3u^2\sigma^2}{c^2} \simeq \frac{(vr)^2}{r^2c^2} \simeq \left(\frac{v}{c}\right)^2, \quad (2.2.23)$$

где записана трансверсальная компонента скорости $v \simeq r\dot{\varphi}$. Таким образом, *эйштейновская, дополнительная «сила» пренебрежимо мала по сравнению с ньютоновой силой для частиц, движущихся со скоростью, малой по сравнению со скоростью света.*

Следует обратить внимание на тот факт, что здесь использованы понятия силы в координатном смысле. Они существенно зависят от выбора координатной системы. Для корректной физической интерпретации необходимо использовать методы задания системы отсчета, которые подробно рассмотрены во второй части книги.

Контрольные задания

1. Найти выражение для константы C_0 в метрике Шварцшильда из сравнения (2.2.13) с выражением для закона сохранения энергии в ньютоновой механике.
2. Убедиться в математических сложностях нахождения из уравнения (2.2.17) точных решений для траектории пробных тел в метрике Шварцшильда, что обосновывает использование приближенных методов.

§ 2.3. Классические эффекты ОТО

2.3.1. Смещение перигелия Меркурия

I. Перепишем уравнение геодезической (2.2.18) в более компактной форме

$$u'' + u = \alpha + \beta u^2, \quad (2.3.1)$$

где $\beta u^2 \ll \alpha$, и

$$\alpha = G\frac{M}{\sigma^2}; \quad \beta = 3G\frac{M}{c^2}. \quad (2.3.2)$$

Будем решать его методом последовательных приближений.

II. *Нулевое приближение* представляет собой решение уравнения (2.3.1) для случая ньютонова закона всемирного тяготения ($\beta = 0$), т. е. уравнения

$$u''_0 + u_0 = \alpha. \quad (2.3.3)$$

Его решение состоит из двух частей: общего решения однородного уравнения (колебаний с единичной частотой)

$$u_{00} = C_1 \cos(\varphi + \varphi_0)$$

и частного решения неоднородного уравнения $u_{01} = \alpha$, так что имеем

$$u_0 = u_{00} + u_{01} = \alpha + C_1 \cos \varphi = \alpha(1 + e \cos \varphi), \quad (2.3.4)$$

где положено, что начальная фаза $\varphi_0 = 0$. Для случая финитного движения планеты это уравнение эллипса с эксцентриситетом

$$e = \frac{C_1}{\alpha} < 1,$$

которое можно записать в более знакомом виде

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \quad (2.3.5)$$

где $p = 1/\alpha$ — фокальный параметр.

III. Первое приближение является решением уравнения (2.3.1), в правую часть которого вместо u подставлено нулевое приближение (2.3.4), т. е. решением уравнения

$$\begin{aligned} u_1'' + u_1 = \beta \alpha^2 (1 + e \cos \varphi)^2 = \alpha^2 \beta \left(1 + \frac{e^2}{2} \right) + \\ + \frac{1}{2} \alpha^2 \beta e^2 \cos 2\varphi + 2\alpha^2 \beta e \cos \varphi, \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

где квадрат косинуса записан через косинус двойного угла по известной тригонометрической формуле.

IV. Поскольку уравнение (2.3.6) является линейным, его решение можно представить в виде суммы трех частных решений уравнения колебаний последовательно с отдельными слагаемыми в правых частях

$$u_1 = u_{11} + u_{12} + u_{13} \quad (2.3.7)$$

и общего решения u_0 (2.3.4) однородного уравнения. Для первого слагаемого имеем

$$u_{11} = \alpha^2 \beta \left(1 + \frac{e^2}{2} \right). \quad (2.3.8)$$

Второе слагаемое находится из решения уравнения колебаний с правой частью в виде вынуждающей силы с удвоенной частотой. Оно имеет вид

$$u_{12} = -\frac{1}{6} \alpha^2 \beta e^2 \cos 2\varphi. \quad (2.3.9)$$

Третье слагаемое соответствует резонансному случаю, когда частота вынуждающей силы равна собственной частоте колебаний. Как известно, решение такого уравнения ищется в виде

$$u_{13} = C_2 \varphi \sin \varphi + C_3 \varphi \cos \varphi.$$

Вычисляя константы интегрирования C_2 и C_3 , находим

$$u_{13} = \alpha^2 \beta e \varphi \sin \varphi. \quad (2.3.10)$$

Собирая все части решения, имеем в данном приближении решение

$$u = \alpha \left(1 + e \cos \varphi \right) + \alpha^2 \beta \left(1 + \frac{e^2}{2} \right) - \\ - \frac{1}{6} \alpha^2 \beta e^2 \cos 2\varphi + \alpha^2 \beta e \varphi \sin \varphi. \quad (2.3.11)$$

V. Проанализируем вклады отдельных слагаемых. Член u_{11} приводит к незначительной деформации (сжатию) эллипса, сохраняя замкнутый характер траектории. Этот эффект чрезвычайно мал и в настоящее время необнаружим.

Слагаемое u_{12} приводит к наложению на эллипс биений с удвоенной частотой, не меняя замкнутый характер траектории. Этот эффект также чрезвычайно мал и недоступен для обнаружения существующей аппаратурой.

Третье, резонансное слагаемое приводит к накоплению эффекта с каждым новым витком орбиты. Собирая вместе первое и последнее слагаемые справа в (2.3.11), имеем

$$u \simeq u_0 + u_{13} = \alpha \left(1 + e \cos \varphi + \beta e \varphi \sin \varphi \right) \simeq \\ \simeq \alpha \left[1 + e \cos (\varphi - \alpha \beta \varphi) \right], \quad (2.3.12)$$

где из-за малости констант положено $\alpha \beta \varphi \simeq \sin \alpha \beta \varphi$ и $\cos \alpha \beta \varphi \simeq 1$ и произведен переход к косинусу разности двух углов.

VI. Исходя из положения планеты в перигелии (на кратчайшем расстоянии от Солнца), поставим вопрос о значении угла, при котором на следующем витке будет то же самое кратчайшее положение. Очевидно, это произойдет, когда аргумент косинуса изменится на 2π , т. е. при условии

$$\varphi(1 - \alpha\beta) = 2\pi, \quad (2.3.13)$$

откуда находим

$$\varphi = \frac{2\pi}{1 - \alpha\beta} \simeq 2\pi + 2\pi\alpha\beta \equiv 2\pi + \Delta\varphi, \quad (2.3.14)$$

где, используя (2.3.2), имеем

$$\Delta\varphi = 6\pi \frac{G^2 M^2}{c^2 \sigma^2}. \quad (2.3.15)$$

Такое движение планеты представляет собой розетку, составленную из поворачивающегося на малый угол эллипса (см. рис. 2.2). Эту розетку можно наглядно представить как движение шарика в неглубокой чаше-воронке, изображенной на рис. 2.1. Понятно, что этот шарик будет крутиться по поверхности, описывая некую кривую траекторию.

Для ближайшей к Солнцу планеты Меркурия это значение составляет $\Delta\varphi_M \simeq 43,9''$ за столетие. Для Венеры $\Delta\varphi_M \simeq 8,6''$ за столетие. Этот эффект для Меркурия был обнаружен астрономами уже в конце XIX века, но некоторое время для него не было подходящего объяснения. Оно было получено сразу же после создания общей теории относительности и явилось первым подтверждением эйнштейновской теории гравитации.

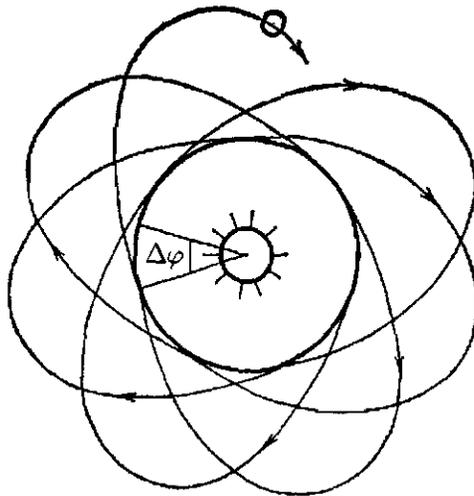


Рис. 2.2. Движение планеты в метрике Шварцшильда по розетке

2.3.2. Эффект отклонения лучей света

Другое подтверждение общей теории относительности было получено в 1919 году во время наблюдения солнечного затмения. Было показано, что лучи от далеких звезд, проходящие вблизи диска Солнца, искривляются, причем угол их отклонения оказался в два раза больше, чем это предсказывалось ньютоновой теорией гравитации.

I. Этот эффект опять можно подсчитать с помощью уравнений геодезической линии, однако в этом случае это будет изотропная геодезическая. Поскольку в (1.3.7) слева стоит нуль, то в итоговом уравнении отсутствует вклад ньютонова слагаемого, и радиальное уравнение принимает вид

$$u'' + u = \beta u^2. \quad (2.3.16)$$

Опять будем решать это уравнение методом последовательных приближений.

II. Нулевое приближение получается решением уравнения (2.3.16) с нулевой правой частью

$$u_0'' + u_0 = 0. \quad (2.3.17)$$

Это однородное уравнение колебаний с единичной частотой. Его решение имеет вид

$$u_0 = C_4 \cos(\varphi + \varphi_0) \rightarrow u_0 = \frac{1}{R} \cos \varphi. \quad (2.3.18)$$

Его можно интерпретировать как свободное движение луча света по прямой линии, параллельной оси y , на расстоянии R от Солнца (см. рис. 2.3).

III. Первое приближение находится из уравнения вида (2.3.16), куда в правую часть подставлено нулевое приближение:

$$u_1'' + u_1 = \frac{\beta}{R^2} \cos^2 \varphi. \quad (2.3.19)$$

Частное решение этого уравнения можно представить в виде

$$u_1 = \frac{\beta}{3R^2} (\cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi). \quad (2.3.20)$$

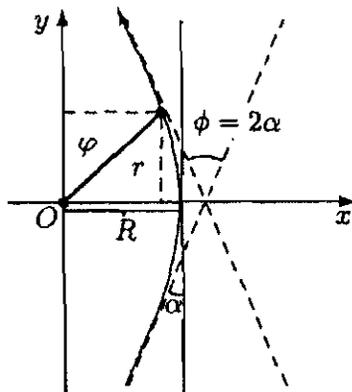


Рис. 2.3. Эффект отклонения света, проходящего вблизи диска Солнца

IV. Собирая вместе нулевое и первое приближение, имеем

$$u = u_0 + u_1 = \frac{\cos \varphi}{R} + \frac{\beta}{3R^2} (\cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi). \quad (2.3.21)$$

Умножим левую и правую части (2.3.21) на rR и введем декартовы координаты согласно формулам:

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi, \quad (2.3.22)$$

тогда (2.3.21) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} R &= x + \frac{GM}{c^2 R} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x^2 + 2y^2) \rightarrow \\ \rightarrow x &= R - \frac{GM}{c^2 R} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x^2 + 2y^2). \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

Эта траектория, симметричная относительно горизонтальной оси, изображена на рис. 2.3.

Чтобы найти угол α между асимптотой и осью y , устремим y к бесконечности, тогда имеем

$$x = R - \frac{GM}{c^2 R} (\pm 2y). \quad (2.3.24)$$

Отсюда легко находится приближенное значение угла α :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dx}{dy} = \mp \frac{2GM}{c^2 R} \simeq \alpha. \quad (2.3.25)$$

Угол отклонения луча света равен удвоенному углу α :

$$\phi = 2\alpha = \frac{4GM}{c^2 R}. \quad (2.3.26)$$

Подставляя сюда массу Солнца и вместо R радиус Солнца, находим численное значение угла отклонения лучей света, проходящих вблизи поверхности Солнца, $\phi = 1,75''$.

Легко понять, что этот эксперимент можно проводить лишь во время солнечного затмения, когда на небе вблизи Солнца видны звезды. Для этого нужно сфотографировать участок звездного неба вблизи прикрытого Луной диска Солнца, а затем сделать снимок этого же участка неба без Солнца и наложить две фотографии друг на друга. По сдвигу двух изображений звезды, оказавшейся вблизи диска, можно вычислить угол отклонения света. Как уже отмечено выше, аналогичный эффект имеет место и в ньютоновой теории гравитации, если свет рассматривать как материальную частицу, движущуюся со скоростью света и взаимодействующую с Солнцем согласно закону всемирного тяготения. Однако в ньютоновой теории эффект оказывается ровно в два раза меньше. Эксперименты, впервые проведенные в 1919 году и неоднократно повторявшиеся позже, убедительно свидетельствуют в пользу эйнштейновского значения угла отклонения, а не ньютоновского.

Впоследствии этот эффект был подтвержден в других экспериментах: при радиолокации планет солнечной системы, при наблюдениях отклонений радиосигналов от квазаров, в виде отрицательных параллаксов далеких звезд и т. д.

2.3.3. Обсуждение классических эффектов ОТО

I. В литературе часто говорят о трех классических эффектах общей теории относительности в метрике Шварцшильда, добавляя к двум описанным выше эффектам гравитационного красного смещения. Он состоит в том, что луч света с некоторой длиной волны λ , поднявшийся от источника на некоторую высоту, воспринимается приемником как свет с более длинной волной, т. е. имеет место сдвиг частоты в красную сторону. Расчеты с использованием понятий системы отсчета показывают, что этот сдвиг частот обусловлен потерей энергии светом на подъем, причем оказывается, что результат одинаков при вычислениях как в рамках общей теории

относительности, так и в ньютоновой теории гравитации. На этом основании правильнее называть эффект гравитационного красного смещения не эффектом общей теории относительности, а лишь проявлением принципа соответствия с ньютоновой теорией.

II. Подчеркнем, что два рассмотренных эффекта количественно отличаются от следствий ньютоновой теории. Так, эффекта смещения перигелия Меркурия в принципе нет в ньютоновой теории, а эффект отклонения лучей света в общей теории относительности в два раза больше, чем в ньютоновой теории.

III. Отметим, что эффект отклонения лучей света в гравитационном поле Солнца, проходящих от него на уровне орбиты Земли, фактически был открыт астрономами в конце XIX века в виде обнаружения так называемых отрицательных параллаксов звезд. Долгое время это воспринималось как некая систематическая ошибка в экспериментах. И лишь в середине 60-х годов XX века в работе Л. Я. Арифова и Кадырова было показано, что отрицательные параллаксы обусловлены общерелятивистским эффектом отклонения лучей света.

В связи с этим отметим, что Н. И. Лобачевский, пытавшийся в середине XIX века путем астрономических наблюдений выяснить вопрос, какой геометрией описывается наш мир — евклидовой или воображаемой (гиперболической), — был бы весьма озадачен, если бы ему тогда хватило точности измерений. Его (воображаемой) геометрии должны были соответствовать положительные параллаксы. Отрицательные параллаксы должны соответствовать сферической геометрии Римана. На самом же деле данный эффект не соответствует ни тому, ни другому, поскольку здесь речь идет не о пространствах постоянной положительной кривизны (смотри главу 3), а о прогибании метрики вблизи гравитирующих объектов.

IV. Наконец, отметим теоретически рассчитанный в метрике Шварцшильда эффект М. Ф. Широкова. Он состоит в следующем: если внутри свободно вращающегося по строго круговой орбите спутника (без сноса) пробной массе сообщить очень малые скорости в радиальном (относительно Земли) и в перпендикулярном плоскости орбиты направлениях, то относительно спутника можно будет

наблюдать малые колебания пробной массы в двух взаимно перпендикулярных направлениях, причем с разными частотами. Эта разность имеет общерелятивистский характер и зависит от радиуса круговой орбиты и гравитационного радиуса Земли. (Подробный расчет см. в [1, с. 87–91]).

Анализ этого эффекта показал, что частота колебаний массы в плоскости, перпендикулярной орбите спутника, совпадает с частотой вращения спутника по орбите, тогда как частота в радиальном направлении соответствует частоте движения объекта по розетке в метрике Шварцшильда. Таким образом, эффект Широкова представляет собой проявление эффекта смещения перигелия (в данном случае перигея) орбиты пробной массы в окрестности Земли.

Контрольные задания

1. Показать, что в специальной теории относительности с ньютоновым гравитационным полем также имеет место эффект смещения перигелия, однако он в 6 раз меньше значения (2.3.15).

Указания к решению. В выражение для квадрата плоской метрики в сферических координатах (в экваториальной плоскости)

$$1 = c^2 \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 - \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 - r^2 \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2$$

подставить два вида производных по интервалу, найденные из законов сохранения энергии и момента импульса частицы:

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 - \frac{G m_0 M}{r} = E_0; \quad r^2 \frac{d\varphi}{ds} = \sigma_0,$$

где в первом слагаемом следует положить

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{c dt}{ds}.$$

Далее следует действовать так, как это изложено для метрики Шварцшильда.

2. Показать, что в ньютоновой теории гравитации эффект отклонения лучей света, проходящих вблизи диска Солнца, в два раза меньше значения (2.3.26).

Указание к решению. Заменить луч света на пробное тело с массой $mc^2 = \hbar\nu$, движущееся со скоростью света c с прицельным расстоянием R в ньютоновом гравитационном поле. Решать данную задачу согласно методам классической теоретической механики.

§ 2.4. Метрика Керра

Другим практически важным точным решением уравнений Эйнштейна является метрика Керра, описывающая искривленное пространство-время вокруг вращающегося материального источника. Следует напомнить, что практически все астрофизические объекты (Солнце, звезды, Земля и другие планеты Солнечной системы) вращаются, т. е. метрика вокруг них отличается от метрики Шварцшильда. Очевидно, что в таком пространстве имеется выделенное направление, т. е. метрика является аксиально симметричной.

Точное решение, описывающее метрику вокруг вращающегося источника, впервые было найдено Р. Керром в 1963 году. Вывод этой метрики достаточно громоздок (см. [11, с. 208–211]), поэтому выпишем лишь окончательный результат. Чаще всего эта метрика записывается в координатах Р. Бойера и Р. Линдквиста:

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & \left(1 - \frac{r_g r}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) (dx^0)^2 - \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 + a^2 - r_g r} dr^2 - \\
 & - (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{r_g r a^2 \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) \sin^2 \theta d\varphi^2 + \\
 & + \frac{2r_g r a}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \sin^2 \theta dx^0 d\varphi.
 \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

Это стационарная метрика, зависящая от двух констант: r_g и a .

2.4.1. Анализ метрики Керра

1. Рассмотрим, во что превращается метрика Керра при обращении в нуль одной из двух входящих в нее констант.

1) При $a = 0$ и $r_g \neq 0$ метрика Керра в координатах Бойера—Линдквиста переходит в метрику Шварцшильда (2.1.28) в координатах кривизн. Именно это обстоятельство обусловило использование ее именно в таком виде.

2) При $a \neq 0$ и $r_g = 0$ метрика Керра принимает вид

$$ds^2 = (dx^0)^2 - \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 + a^2} dr^2 - \\ - (r^2 + a^2 \cos^2 \theta)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - a^2 \sin^4 \theta d\varphi^2. \quad (2.4.2)$$

Произведя преобразование координат:

$$x = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \cos \varphi; \\ y = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \sin \varphi; \quad z = r \cos \theta, \quad (2.4.3)$$

легко убедиться, что метрика (2.4.2) в новых координатах имеет вид

$$ds^2 = (dx^0)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (2.4.4)$$

т. е. является метрикой плоского пространства-времени в эллиптических координатах, удовлетворяющих условию

$$\frac{x^2 + y^2}{r^2 + a^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1. \quad (2.4.5)$$

II. До получения Керром точного решения метрика вокруг вращающихся источников описывалась приближенной метрикой Лензе—Тирринга, найденной в 1918 году:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) (dx^0)^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} - \\ - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + \frac{4G\tilde{M}}{c^3 r} \sin^2 \theta dx^0 d\varphi, \quad (2.4.6)$$

где \tilde{M} — момент количества движения центрального источника. Из сравнения (2.4.1) и (2.4.6) следует физический смысл параметра в метрике Керра:

$$a = \frac{\tilde{M}}{cM}.$$

Отметим, что Керр в своей первой работе полагал

$$a = \frac{2}{5} \cdot \frac{\omega R^2}{c}, \quad (2.4.7)$$

где ω — угловая скорость вращения, R — радиус сферического тела.

Легко видеть, что метрика (2.4.1) инвариантна относительно одно-временного отражения времени и изменения знака ω , т. е. $x^0 \rightarrow -x^0$; $a \rightarrow -a$, что также подтверждает справедливость отождествления a с физической величиной, пропорциональной моменту импульса.

III. Рассмотрим характерные для метрики Керра области пространства-времени вблизи источника.

- Компонента метрики g_{11} обращается в бесконечность при

$$r^2 + a^2 - r_g r = 0,$$

откуда находим *радиус горизонта*

$$r_0 = \frac{r_g}{2} \pm \sqrt{\frac{r_g^2}{4} - a^2}. \quad (2.4.8)$$

Ограничимся большим значением, т. е. случаем знака плюс.

- Компонента метрики g_{00} обращается в нуль при

$$r^2 - r r_g - a^2 \cos^2 \theta = 0,$$

откуда находим так называемый *радиус поверхности бесконечного красного смещения*

$$r_a = \frac{r_g}{2} \pm \sqrt{\frac{r_g^2}{4} - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (2.4.9)$$

Опять ограничимся большим корнем. Из (2.4.8) и (2.4.9) видно, что две поверхности соприкасаются в полюсах поверхности горизонта (см. рис. 2.4).



Рис. 2.4. Поверхности горизонта и бесконечного красного смещения, ограничивающие эргосферу

Область, ограниченная извне поверхностью бесконечного красного смещения и изнутри поверхностью горизонта, называется эргосферой.

IV. Поясним, почему внутренняя поверхность эргосферы называется горизонтом. Для этого напомним сведения из дифференциальной геометрии. Если гиперповерхность задана уравнением $f(x^0, x^1, x^2, x^3) = \text{const}$, то компоненты нормали n_μ к ней находятся из формулы

$$n_\mu = \frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu}. \quad (2.4.10)$$

Для того, чтобы некий сигнал проходил сквозь данную гиперповерхность необходимо, чтобы нормаль была времени-подобной, т. е. $g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu > 0$. В данном же случае метрики Керра уравнение гиперповерхности горизонта имеет вид

$$f(x) = r = \frac{r_g}{2} + \sqrt{\left(\frac{r_g}{2}\right)^2 - a^2},$$

откуда следует, что на данной гиперповерхности

$$g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu = 0, \quad (2.4.11)$$

т. е. гиперповерхность горизонта является изотропной. Более того, она является однонаправленной. Такими же свойствами обладает и горизонт в метрике Шварцшильда.

2.4.2. Уравнения геодезических линий в метрике Керра

Подставляя компоненты метрики Керра в уравнения геодезических линий (1.3.7), можно получить систему из четырех уравнений, аналогичную записанной для метрики Шварцшильда в § 2.2, п. 2.2.2. В общем случае эти уравнения в данной метрике имеют более сложный вид, нежели в метрике Шварцшильда. Ограничимся здесь более простыми случаями движения частиц в экваториальной плоскости, когда в начальный момент $\theta = \pi/2$ и $d\theta/ds = 0$.

I. Начнем с уравнения для угла θ . Легко убедиться, что все производные от метрического тензора, входящие в это уравнение, в экваториальной плоскости равны нулю. Отсюда следует вывод, что если

тело и его скорость в начальный момент лежали в экваториальной плоскости, то и все его движение будет оставаться в этой плоскости (в плоскости Лапласа).

II. Уравнения геодезических линий для компонент x^0 и $x^3 = \varphi$ в экваториальной плоскости находятся в виде

$$\frac{d^2 x^0}{ds^2} = -\frac{r_g(r^2 + a^2)}{r^2 \Delta_1} \frac{dx^0}{ds} \frac{dr}{ds} + \frac{ar_g(3r^2 + a^2)}{r^2 \Delta_1} \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds}; \quad (2.4.12)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{ds^2} = -\frac{ar_g}{r^2 \Delta_1} \frac{dx^0}{ds} \frac{dr}{ds} - \frac{(2r^3 - r_g a^2 - 2r_g r^2)}{r^2 \Delta_1} \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds}, \quad (2.4.13)$$

где использовано обозначение $\Delta_1 = r^2 + a^2 - r_g r$.

Умножая оба уравнения на $\Delta_1(ds/dr)$ и вводя новые обозначения:

$$y = \frac{dx^0}{ds}, \quad z = \frac{d\varphi}{ds},$$

приходим к системе уравнений для y и z как функций от r . Их решение представляется в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{ds} &= \frac{1}{\Delta_1} \left(\frac{r - r_g}{r} \sigma_0 + a E_0 \right); \\ \frac{dx^0}{ds} &= \frac{1}{\Delta_1} \left(E_0 r^2 - \frac{ar_g}{r} \sigma_0 + a^2 E_0 \right). \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

Сравнивая эти формулы с (2.2.7) и (2.2.13), убеждаемся, что введенные здесь (для геодезических в метрике Керра) константы σ_0 и E_0 соответствуют так же обозначенным константам интегрирования в метрике Шварцшильда.

III. Уравнение для радиальной компоненты ($\mu = 1$) в общем случае имеет довольно сложный вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{ds^2} &= -\frac{\Delta_1 r_g}{2r^4} \left(\frac{dx^0}{ds} \right)^2 - \frac{(2a^2 - r_g r)}{2r \Delta_1} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + \frac{\Delta_1}{r} \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 - \\ &- \frac{\Delta_1}{2r^2} \left(2r - \frac{r_g a^2}{r^2} \right) \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + \frac{\Delta_1 r_g a}{r^4} \left(\frac{dx^0}{ds} \right) \left(\frac{d\varphi}{ds} \right), \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

однако его решать не обязательно. Его первый интеграл получается из выражения для квадрата интервала в метрике Керра (2.4.1). Деля его на ds^2 и подставляя в него найденные выше формулы (2.4.14) (в экваториальной плоскости), приходим к выражению для квадрата радиальной скорости:

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = E_0^2 - \frac{\Delta_1 + 2\sigma_0 E_0 a}{r^2} - \frac{(r - r_g)^2}{r^3} \sigma_0^2. \quad (2.4.16)$$

Из этого выражения, переходя к переменной

$$u = \frac{1}{r}$$

и заменяя дифференцирование по ds на дифференцирование по $d\varphi$, согласно (2.2.16), легко прийти к обобщению на случай метрики Керра первой формулы Бине, а, дифференцируя ее по $d\varphi$, можно получить обобщенную «силу» в метрике Керра при движении пробной частицы в экваториальной плоскости. Однако при этом следует не забывать, что таким образом введенная «сила» имеет координатный характер. Для корректной интерпретации подобных выражений необходимо использовать методы задания систем отсчета (см. вторую часть).

2.4.3. Некоторые эффекты в метрике Керра

В метрике Керра имеют место классические эффекты отклонения лучей света и смещения перигелия Меркурия, в значения которых вносятся поправки, зависящие от параметра вращения a . Эти поправки чрезвычайно малы и в данный момент вряд ли возможно их экспериментальное обнаружение. Назовем несколько характерных эффектов, присущих метрике лишь вокруг вращающегося объекта.

I. Эффект полного увлечения эргосферой. В эргосфере никакая частица не может находиться в покое. Предположим противное, т. е. пусть

$$r = \text{const}, \quad \theta = \text{const}, \quad \varphi = \text{const},$$

тогда квадрат интервала в эргосфере

$$ds^2 = \frac{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta - r r_g)}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} (dx^0)^2 < 0, \quad (2.4.17)$$

вследствие (2.4.9), становится пространственно-подобным, т. е. координата x^0 теряет времени-подобный характер. Для сохранения времени-подобности x^0 необходимо наличие положительного слагаемого со смешанной компонентой метрического тензора g_{03} . Это означает, что в эргосфере частицы непременно должны вращаться, причем обязательно в направлении вращения источника.

II. Эффект Пенроуза дает принципиальную возможность извлекать энергию из вращающейся черной дыры. Можно показать, что частицы могут пересекать внешнюю границу эргосферы, причем в обоих направлениях. Поскольку в внутри эргосферы $g_{00} < 0$, то формально вычисляемая энергия частицы может оказаться отрицательной. На этом основан эффект извлечения энергии из черной дыры. Предположим, что существуют такие астрофизические объекты, что внешний радиус их эргосферы больше его геометрических размеров. Пусть некоторый объект (ракета) влетает в эргосферу, обладая некоторой положительной энергией. Влетев в эргосферу, пусть объект распадается на две части, одна из которых остается в эргосфере, обладая отрицательной энергией, а другая вылетает из эргосферы, теперь приобретая большую энергию, чем обладала ракета до вхождения в эргосферу.

Очевидно, при этом не происходит нарушения закона сохранения энергии. Энергия черпается из вращающейся черной дыры, которая в процессе извлечения из нее энергии данным способом будет замедлять свое вращение. При этом ее эргосфера будет уменьшаться до тех пор пока внешний радиус эргосферы не сольется с радиусом горизонта, т. е. пока керровская черная дыра не превратится в шварцшильдовскую черную дыру.

III. Эффект Мицкевича состоит в том, что два пробных тела, вращающихся вокруг керровского источника в экваториальной плоскости по крутовым орбитам с одинаковыми значениями радиальной координаты, но в противоположных направлениях — в ту же сторону, что и керровский источник, и в противоположную, — движутся с разными скоростями, что должно проявляться в дрейфе точки встречи (см. рис. 2.5).

Подсчитаем этот эффект, исходя из радиального уравнения геодезической (2.4.15), которое при $r = \text{const}$ в экваториальной плос-

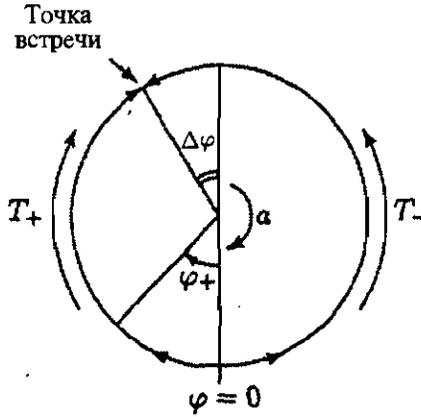


Рис. 2.5. Эффект Мицкевича. Дрейф точки встречи пробных частиц на круговых орбитах

кости ($\theta = \pi/2$) принимает вид

$$\frac{\Delta_1 r_g}{2r^4} \left(\frac{dx^0}{ds} \right)^2 + \frac{\Delta_1}{2r^2} \left(2r - \frac{r_g a^2}{r^2} \right) \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 - \frac{\Delta_1 r_g a}{r^4} \left(\frac{dx^0}{ds} \right) \left(\frac{d\varphi}{ds} \right) = 0. \quad (2.4.18)$$

Умножив это выражение на

$$\frac{2r^4}{\Delta_1} \left(\frac{ds}{d\varphi} \right)^2,$$

приходим к квадратному уравнению относительно $dx^0/d\varphi$:

$$r_g \left(\frac{dx^0}{d\varphi} \right)^2 - 2r_g a \frac{dx^0}{d\varphi} + (r_g a^2 - 2r^3) = 0. \quad (2.4.19)$$

Его решение находится в виде

$$\frac{dx^0}{d\varphi} = \frac{r_g a \pm r \sqrt{2r_g r}}{r_g}, \quad (2.4.20)$$

где знак плюс соответствует движению тела в направлении вращения источника, а знак минус — в обратном направлении (с большей угловой скоростью).

Интегрируя это выражение по φ от нуля до 2π , получаем (координатные) периоды обращения тел вокруг источника соответственно по и против направления вращения источника:

$$T_+ = \frac{2\pi}{c} \left(r \sqrt{\frac{2r}{r_g}} + a \right); \quad T_- = \frac{2\pi}{c} \left(r \sqrt{\frac{2r}{r_g}} - a \right). \quad (2.4.21)$$

Обозначая через $\delta\varphi$ угол, характеризующий отклонение точки встречи от $\pi/2$, и через ω_{\pm} — соответствующие частоты обращения тел, имеем для угла уравнение

$$\frac{\pi + \delta\varphi}{\omega_-} = \frac{\pi - \delta\varphi}{\omega_+}, \quad (2.4.22)$$

откуда находим

$$\delta\varphi = \pi \frac{\omega_- - \omega_+}{\omega_+ + \omega_-} = \pi \frac{T_+ - T_-}{T_+ + T_-} = \frac{\pi a}{r} \sqrt{\frac{r_g}{2r}}. \quad (2.4.23)$$

Из выписанных выражений следует вывод, что тело, движущееся в направлении, противоположном угловой скорости вращения источника, чтобы удержаться на данной круговой орбите, должно иметь скорость, большую того тела, угловая скорость движения которого совпадает с направлением угловой скорости источника. Таким образом, точка встречи смещается в сторону, противоположную направлению вращения центрального источника.

Подчеркнем, что данный эффект вычислен в координатном времени. При использовании строгих понятий систем отсчета (см. главу 4), найденный угол будет зависеть от использованной системы отсчета. Очевидно, что в метрике Шварцшильда данный эффект отсутствует.

IV. Эффект Шиффа состоит в том, что ось гироскопа, выведенного спутником на круговую орбиту вокруг вращающегося источника (например, вокруг Земли), будет прецессировать с некоторой угловой скоростью Ω , зависящей от радиуса R круговой орбиты гироскопа, его орбитальной скорости и параметров центрального источника (массы M , угловой скорости вращения и момента инерции). Этот эффект вычисляется на основе уравнений Матиссона—Папалетру (см., например, [1, с. 43–46]). Отметим, что оценки показывают возможность обнаружения этого эффекта современными экспериментальными средствами. Более того, данный эксперимент

уже проведен американскими коллегами, и в данный момент идет обработка полученных результатов.

Контрольное задание

Впервые метрика Керра была найдена ее автором в следующем виде:

$$ds^2 = (dx^0)^2 - dr^2 - (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 - (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\varphi^2 - 2a \sin^2 \theta dr d\varphi - \frac{r_g r}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} (dr + a \sin \theta d\varphi + dx^0)^2. \quad (2.4.24)$$

Найти преобразования координат, переводящие эту метрику к общепринятому виду (2.4.1) в координатах Бойера и Линдквиста.

§ 2.5. «Частицеподобные» точные решения уравнений Эйнштейна

«Частицеподобными» часто называют решения совместной системы уравнений Эйнштейна, Максвелла и Клейна—Фока с источником в виде некоего компактного материального образования (частицы-центра). Обычно говорят, что такие решения могут зависеть от 8 характерных констант: $M, n, a, b, Q, q, g, \Lambda$. Эти параметры интерпретируются следующим образом:

M — масса, или чаще используется $r_g = \frac{2GM}{c^2}$;

n — параметр НУТ (Ньюмен, Унги, Тамбурино) — мнимая масса (?);

a — параметр, характеризующий вращение источника;

b — ускорение источника;

Q — заряд источника скалярного поля;

q — электрический заряд источника, или часто используется $e_g = \frac{\sqrt{G}q}{c^2}$;

g — магнитный заряд (магнитного монополя);

Λ — космологическая постоянная.

Часто три пары констант группируют следующим образом:

$$M + in, \quad a + ib, \quad q + ig.$$

Ниже приведены физически наиболее интересные метрики такого сорта (другие решения можно найти в [6]).

2.5.1. Некоторые обобщения метрики Шварцшильда

Выпишем несколько наиболее важных обобщений метрики Шварцшильда.

I. Метрика Котлера является сферически симметричным решением уравнений Эйнштейна с космологическим членом в «вакууме»

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (2.5.1)$$

Оно находится в виде

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{\Lambda r^2}{3}\right) (dx^0)^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{\Lambda r^2}{3}\right)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (2.5.2)$$

Из-за дополнительного слагаемого, пропорционального r^2 , в компонентах g_{00} и g_{11} это решение не является асимптотически плоским. Поскольку долгое время не было оснований говорить о проявлениях космологической постоянной в наблюдаемой части окружающего мира, полагали, что значение космологической постоянной чрезвычайно мало: $\Lambda < 10^{-56} \text{ см}^{-2}$.

II. Метрика Райсснера—Нордстрема — электровакуумное статическое сферически симметричное решение системы уравнений Эйнштейна и Максвелла

$$R_{\mu\nu} = -\frac{2G}{c^4} \left(F_{\mu\lambda} F_{\nu}^{\lambda} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right); \quad F_{\nu}^{\mu\nu} = 0 \quad (2.5.3)$$

в координатах кривизн имеет вид

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{Gq^2}{c^4 r^2}\right) (dx^0)^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{Gq^2}{c^4 r^2}\right)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2); \quad (2.5.4)$$

$$F^{01} = E^1 = \frac{q}{r^2},$$

где q — электрический заряд.

III. Метрика Фишера — статическое сферически симметричное совместное решение уравнений Эйнштейна и Клейна—Фока для безмассового скалярного поля

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \varkappa \left(\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta} \right); \quad g^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}\varphi = 0. \quad (2.5.5)$$

Данная метрика записывается в более сложном виде

$$ds^2 = \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{r^2(z)} (dx^0)^2 - \frac{r^2(z)}{(z - z_1)(z - z_2)} dz^2 - r^2(z)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (2.5.6)$$

где использованы обозначения:

$$r^2(z) = (z - z_1)^{1-\alpha}(z - z_2)^{1+\alpha}; \quad z_{1,2} = \mu \pm \sqrt{\mu^2 + GQ^2}; \quad \alpha = \left\| \frac{(z_1 + z_2)}{(z_1 - z_2)} \right\|; \quad (2.5.7)$$

μ — постоянная интегрирования (обычно полагают $\mu = -r_g/2$); Q — скалярный заряд источника. Скалярное поле убывает обратно пропорционально r , а его напряженность — обратно пропорционально квадрату радиальной координаты, как и должно быть в пространстве трех измерений.

IV. Метрика Вайдья описывает пространство-время вокруг сферически симметричного источника, испускающего высокочастотное излучение. Такая система описывается уравнениями Эйнштейна, в правой части которого стоит усредненный тензор энергии-импульса высокочастотного излучения:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} P k_{\mu} k_{\nu}, \quad (2.5.8)$$

где k^{μ} — изотропный вектор распространения излучения, P — плотность потока энергии в системе отсчета с 4-скоростью τ^{μ} такой, что $k^{\mu}\tau_{\mu} = 1$. Метрика Вайдья в координатах кривизн находится в виде

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM(u)}{c^2 r} + \frac{\Lambda r^2}{3} \right) (dx^0)^2 + 2 du dr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (2.5.9)$$

где $u = x^0 - r$ — запаздывающее время, $M(u)$ — масса, зависящая от u .

Имеется большое число работ, в которых исследовались решения уравнений Эйнштейна внутри сферически симметричных материальных источников, каковыми, например, являются звезды.

2.5.2. Обобщения метрики Керра

Приведем ряд частицеподобных аксиально-симметричных метрик, обобщающих метрику Керра.

I. Метрика Керра—Ньюмена является обобщением метрики Керра на случай электрически заряженного вращающегося тела (является решением системы уравнений Эйнштейна и Максвелла):

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & \left(1 - \frac{r_g r - e_g^2}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) (dx^0)^2 - \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 + a^2 - r_g r + e_g^2} dr^2 - \\
 & - (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{(r_g r - e_g^2) a^2 \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) \sin^2 \theta d\varphi^2 + \\
 & + \frac{2(r_g r - e_g^2) a \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} dx^0 d\varphi. \quad (2.5.10)
 \end{aligned}$$

II. Метрика НУТ (Ньюмен, Унти, Тамбурино) — вакуумное решение уравнений Эйнштейна:

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & \left(1 - \frac{r_g r + 2n^2}{r^2 + n^2}\right) \left(dx^0 + 4n \sin^2 \frac{\theta}{2} d\varphi\right)^2 - \\
 & - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g r + 2n^2}{r^2 + n^2}} - (r^2 + n^2)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (2.5.11)
 \end{aligned}$$

Физическая интерпретация этой метрики до конца не выяснена. Высказано предположение, что источником данной метрики можно считать тонкий луч света (световую нить).

III. Обобщением решения НУТ, зависящим от пяти констант, является метрика (записана не в координатах Бойера—Линдквиста):

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & \Phi(r) \left(dx^0 + 4n \sin^2 \frac{\theta}{2} d\varphi\right)^2 - \frac{dr^2}{\Phi(r)} - \\
 & - (r^2 + n^2)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (2.5.12)
 \end{aligned}$$

где

$$\Phi(r) = 1 - \frac{r_g r + 2n^2 + (8/3)\Lambda n^4}{r^2 + n^2} + \frac{q^2 + g^2}{r^2 + n^2} + \frac{\Lambda}{3}(r^2 + 5n^2).$$

IV. Выпишем в координатах Бойера—Линдквиста метрику, которая так же обобщает решение НУТ, как метрика Керра обобщает метрику Шварцшильда:

$$\begin{aligned} ds^2 = & \left(1 - \frac{r_g r + 2n^2 - 2an \cos \theta}{r^2 + n^2 - 2an \cos \theta + a^2 \cos^2 \theta} \right) (dx^0)^2 - \\ & - \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta + n^2 - 2an \cos \theta}{r^2 + a^2 - r_g r - n^2} dr^2 - \\ & - \frac{\sin^2 \theta (r^2 + a^2 + n^2)^2 - (r^2 + a^2 - r_g r - n^2)(a \sin^2 \theta + 2n \cos \theta)^2}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta + n^2 - 2an \cos \theta} d\varphi^2 + \\ & + \frac{2[2a \sin^2 \theta (r_g r / 2 + n^2) - 2n(r^2 + a^2 - r_g r - n^2) \cos \theta]}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta + n^2 - 2an \cos \theta} dx^0 d\varphi - \\ & - [r^2 + (n - a \cos \theta)^2] d\theta^2. \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

Контрольные задания

1. По аналогии со случаем метрики Шварцшильда (см § 2.2, п. 2.2.2) записать уравнения геодезических линий в метрике Коттлера (2.5.2).
2. По аналогии со случаем метрики Шварцшильда записать уравнения геодезических линий в метрике Райсснера—Нордстрема (2.5.4).
3. По аналогии с выводом метрики Шварцшильда (см. § 2.2, п. 2.2.1) получить метрику Коттлера (2.5.2).
4. По аналогии с выводом метрики Шварцшильда получить решение Райсснера—Нордстрема (2.5.4) из совместной системы уравнений Эйнштейна и Максвелла.

Замечание. Учесть, что в сферически симметричном случае электромагнитный векторный потенциал характеризуется лишь одной компонентой.

Глава 3

Введение в космологию

Общая теория относительности позволила физике выйти на качественно новый уровень в понимании физического мира — в ее рамках можно в принципе ставить и решать задачу описания Вселенной как целого. Конечно, нельзя забывать, что при этом производится экстраполяция наших представлений о мире максимально далеко за пределы изученной области Вселенной. Тем не менее обсуждение подобных задач необходимо, поскольку только это может помочь ответить на вопрос, до каких пределов экстраполяция правомерна, когда и каким образом нужно будет изменить наши представления о природе мироздания.

§ 3.1. Однородные изотропные пространства

В математическом плане описание Вселенной как целого основано на решении уравнений Эйнштейна (1.5.7), в правую часть которых нужно подставить тензор энергии-импульса всей материи мира: планет, звезд, межзвездной среды и всего прочего. Ясно, что точно все это учесть невозможно, поэтому в основу современной космологии положены упрощенные однородные изотропные модели.

3.1.1. Условия однородности и изотропии

Сформулируем главные условия, используемые при построении однородных изотропных космологических моделей.

Во-первых, предполагается, что всю материю мира можно представить в виде сплошной среды наподобие пыли, когда в качестве отдельных пылинок выступают не отдельные звезды и даже не отдельные галактики, а скопления галактик.

Во-вторых, полагается, что во Вселенной распределение материи — пылинок однородно и изотропно, т. е. материя распределена равномерно вдоль каждого направления и одинаково по всем направлениям. Очевидно, что эти условия не выполняются в масштабах

Солнечной системы, отдельной галактики или даже конкретного их скопления, однако по мере увеличения масштаба распределение материи все более становится близким к однородному и изотропному.

В-третьих, пренебрегают пекулярными движениями материальной среды, т. е. среда рассматривается как бы «вмороженной» в пространство⁴⁾.

Решения уравнений Эйнштейна (без космологического члена) при выполнении названных условий впервые нашел в 1921 году А. А. Фридман. В настоящее время *однородные изотропные космологические решения* Фридмана составляют основу космологии.

Однородное и изотропное распределение материи диктует существенное упрощение искомого вида компонент метрического тензора, которые должны обладать свойством сферической симметрии (с центром в любой точке пространства) и одинаковым образом зависеть от времени-подобной координаты. Метрика должна иметь вид

$$ds^2 = a^2(x^0)[(dx^0)^2 - ((dx^1)^2 + b^2(x^1)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2))], \quad (3.1.1)$$

где $a(x^0)$ — функция от времени-подобной координаты x^0 , характеризующей эволюцию мира, а $b(x^1)$ — функция от одной пространственно-подобной координаты x^1 , характеризующей 3-мерное пространство. Обратим внимание на то, что функция $b^2(x^1)$ перед угловой частью теперь не должна удовлетворять второму условию из (2.1.6), налагавшемуся при выводе решения Шварцшильда, где оно выделяло единый центр симметрии.

Подставим эту метрику в уравнения Эйнштейна. Будем действовать по стандартной методике: выпишем компоненты метрики, символы Кристоффеля, тензор кривизны.

I. Метрика (3.1.1) диагональна, т. е. компоненты ковариантного метрического тензора образуют матрицу:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a^2(x^0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2(x^0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2(x^0)b^2(x^1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2(x^0)b^2(x^1)\sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (3.1.2)$$

⁴⁾ Это соответствует использованию системы отсчета, в среднем сопутствующей материи Вселенной (см. § 4.5).

Поскольку метрика диагональна, то контравариантные компоненты метрического тензора находятся как обратные величины к ковариантным компонентам.

При данной специфике метрического тензора удобно 4-мерный интервал представить в привычном для специальной теории относительности $(1 + 3)$ -расщепленном виде

$$ds^2 = a^2(dx^0)^2 - dt^2 \equiv a^2(dx^0)^2 - h_{ik} dx^i dx^k, \quad (3.1.3)$$

где h_{ik} следует понимать как компоненты 3-мерного метрического тензора вида:

$$h_{ik} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 b^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 b^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}; \quad (3.1.4)$$

$$h^{ik} = \begin{pmatrix} a^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & a^{-2} b^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & a^{-2} b^{-2} \sin^{-2} \theta \end{pmatrix}.$$

Здесь контравариантные 3-мерные компоненты вычислены по общему рецепту (1.2.9).

II. Символы Кристоффеля (4-мерные) находятся по формулам (1.4.9). Отличные от нуля компоненты имеют вид:

$$\Gamma_{00}^0 = \Gamma_{11}^0 = \Gamma_{10}^1 = \Gamma_{20}^2 = \Gamma_{30}^3 = \frac{\dot{a}}{a}; \quad \Gamma_{22}^0 = b^2 \frac{\dot{a}}{a}; \quad \Gamma_{33}^0 = b^2 \frac{\dot{a}}{a} \sin^2 \theta; \quad (3.1.5)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \frac{b'}{b}; \quad \Gamma_{23}^3 = \operatorname{ctg} \theta; \quad \Gamma_{22}^1 = -bb'; \quad (3.1.6)$$

$$\Gamma_{33}^1 = -bb' \sin^2 \theta; \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta,$$

где точка означает дифференцирование по x^0 , а штрих — дифференцирование по x^1 . Здесь специально отделены символы Кристоффеля с чисто пространственными компонентами от компонент, содержащих индекс 0, поскольку из-за диагонального вида метрики они имеют одинаковый вид как в 3-мерном, так и в 4-мерной записи.

III. Компоненты тензора Риччи находятся в виде:

$${}^4R_{00} = -\frac{3}{a^2}(\ddot{a}a - \dot{a}^2); \quad (3.1.7)$$

$${}^4R_{11} = \frac{1}{a^2}(\ddot{a}a + \dot{a}^2) + {}^3R_{11}; \quad (3.1.8)$$

$${}^4R_{22} = \frac{1}{a^2}(\ddot{a}a + \dot{a}^2)b^2 + {}^3R_{22}; \quad (3.1.9)$$

$${}^4R_{33} = \frac{1}{a^2}(\ddot{a}a + \dot{a}^2)b^2 \sin^2 \theta + {}^3R_{33}, \quad (3.1.10)$$

где выделены компоненты 3-мерного тензора Риччи, вычисляемые по общим формулам (1.4.12) через 3-мерный метрический тензор (3.1.4), и имеющие вид

$${}^3R_{11} = -2\frac{b''}{b}; \quad {}^3R_{22} = 1 - bb'' - (b')^2; \quad {}^3R_{33} = {}^3R_{22} \sin^2 \theta. \quad (3.1.11)$$

IV. Возьмем уравнения Эйнштейна в виде

$${}^4R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) - \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (3.1.12)$$

с общим видом тензора энергии-импульса материальной среды (1.5.8). Условие «вмороженности» материальной среды, в пространство означает, что отличной от нуля будет только времени-подобная компонента скорости u_0 среды.

Пока имеется в виду самый общий случай материальной среды с давлением и с учетом космологического члена. (В дальнейшем давление будет положено равным нулю.)

V. Подставляя в (3.1.12) компоненты тензора Риччи (3.1.7)–(3.1.10) с учетом формул (3.1.11), находим, что отличными от тождественного нуля будут лишь четыре диагональных уравнения Эйнштейна, которые можно представить в виде

$$-\frac{3}{a^4}(\ddot{a}a - \dot{a}^2) = \frac{\kappa}{2}(\rho c^2 + 3p) - \Lambda; \quad (3.1.13)$$

$$\frac{1}{a^4}(\ddot{a}a + \dot{a}^2)h_{ik} + {}^3R_{ik} = \frac{\kappa}{2}(\rho c^2 - p)h_{ik} + \Lambda h_{ik}. \quad (3.1.14)$$

Представление уравнений Эйнштейна с пространственно-подобными компонентами в виде (3.1.14) фактически означает доказательство важной теоремы: *однородные изотропные пространства (пространственные сечения) космологических моделей обладают свойством*

$${}^3R_{ik} = B h_{ik}, \quad (3.1.15)$$

где $B(x^0)$ — функция, не зависящая от трех пространственных координат.

3.1.2. Пространства постоянной кривизны

Прежде чем решать уравнения Эйнштейна (3.1.13)–(3.1.14), проанализируем однородные изотропные пространства (пространственные сечения), удовлетворяющие свойству (3.1.15). Учитывая, что в пространствах трех измерений тензор Римана—Кристоффеля выражается через тензор Риччи и скалярную кривизну согласно формуле (1.4.1) (с заменой компонент g_{ik} на h_{ik}), находим, что все компоненты тензора Римана—Кристоффеля алгебраически определяются функцией $B(x^0)$ и компонентами метрического тензора h_{ik} :

$${}^3R^i_{jkl} = \frac{B}{2} (h_l^i h_{jk} - h_k^i h_{jl}); \quad (3.1.16)$$

$${}^3R_{ik} = B h_{ik}; \quad {}^3R = -3B. \quad (3.1.17)$$

В зависимости от знака B будем различать пространства трех типов:

- 1) *постоянной положительной кривизны* (в смысле пространственных координат), если $B > 0$;
- 2) *постоянной отрицательной кривизны* (в том же смысле), если $B < 0$;
- 3) *нулевой кривизны*, если $B = 0$.

Очевидно, что пространства разных типов могут различаться лишь видом функции $b(x^1)$ в сферически симметричной метрике (согласно (3.1.1))

$$dl^2 = a^2 ((dx^1)^2 + b^2(x^1)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)). \quad (3.1.18)$$

Выясним, каковы эти функции. Подставляя (3.1.18) в (3.1.17), получаем

$$-\frac{2b''}{b} = Ba^2; \quad 1 - (b')^2 - bb'' = a^2 b^2 B, \quad (3.1.19)$$

откуда следует уравнение для $b(x^1)$:

$$bb'' - (b')^2 + 1 = 0. \quad (3.1.20)$$

Возможны решения этого уравнения трех видов:

$$b_1 = \frac{1}{C_1} \sin(C_1 x^1 + C_2); \quad (3.1.21)$$

$$b_2 = \frac{1}{C_1} \operatorname{sh}(C_1 x^1 + C_2); \quad (3.1.22)$$

$$b_3 = \pm x^1 + C_2, \quad (3.1.23)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования. С помощью, например, первого уравнения из (3.1.19) находим, что первое решение соответствует пространствам положительной кривизны:

$$B = \frac{2}{a^2} > 0 \quad \rightarrow \quad b_1 = \frac{1}{C_1} \sin(C_1 x^1 + C_2); \quad (3.1.24)$$

второе решение соответствует пространствам отрицательной кривизны

$$B = -\frac{2}{a^2} < 0 \quad \rightarrow \quad b_1 = \frac{1}{C_1} \operatorname{sh}(C_1 x^1 + C_2); \quad (3.1.25)$$

третье решение — пространствам нулевой кривизны:

$$B = 0 \quad \rightarrow \quad b_3 = \pm x^1 + C_2. \quad (3.1.26)$$

Исследуем геометрические свойства этих пространств.

1. Пространства постоянной положительной кривизны описываются метрикой

$$dl^2 = a^2 \left((dx^1)^2 + \sin^2 x^1 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right), \quad (3.1.27)$$

где без ущерба для общности положено $C_1 = 1$, $C_2 = 0$. Параметр x^1 может изменяться в пределах $0 \leq x^1 \leq \pi$ (см. рис. 3.1).

Длина окружности и площадь сферы с центром в начале координат, характеризуемые параметрами x^1 и $\theta = \pi/2$, соответственно равны $l = 2\pi a \sin x^1$, $S = 4\pi a^2 \sin^2 x^1$. При увеличении x^1 они

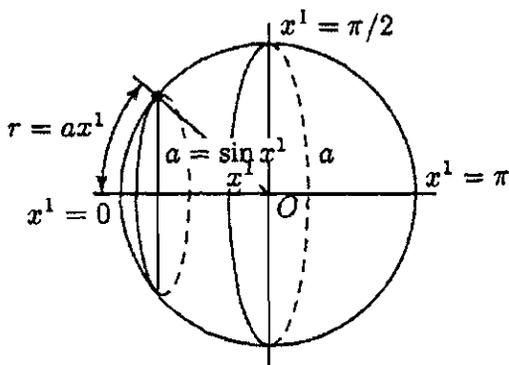


Рис. 3.1. Пространство постоянной положительной кривизны (пространство Римана)

сначала растут, достигают максимальных значений ($l_{max} = 2\pi a$, $S_{max} = 4\pi a^2$), затем уменьшаются до нуля. Радиус $r(x^1)$ окружности или сферы, соответствующий параметру x^1 , равен ax^1 . Его максимальное значение $r_{max} = \pi a$. Отношение длины окружности к радиусу

$$\frac{l}{r} = 2\pi \frac{\sin x^1}{x^1} < 2\pi. \quad (3.1.28)$$

Таким образом, в данном случае мы имеем дело с геометрией на 3-мерной сфере с радиусом a в 4-мерном евклидовом пространстве. Объем всего 3-мерного пространства

$$V = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a^3 \sin^2 x^1 \sin \theta dx^1 d\theta d\varphi = 2\pi^2 a^3. \quad (3.1.29)$$

По этой причине такие пространства обычно называют *замкнутыми* или *конечными*.

II. Пространства постоянной отрицательной кривизны описываются метрикой

$$dl^2 = a^2 ((dx^1)^2 + \text{sh}^2 x^1 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)), \quad (3.1.30)$$

где опять принято $C_1 = 1$, $C_2 = 0$. Параметр x^1 теперь может изменяться в пределах $0 \leq x^1 < \infty$.

Длина окружности и площадь сферы с центром в начале координат и с параметрами x^1 , $\theta = \pi/2$ определяются значениями:

$$l = 2\pi a \operatorname{sh} x^1, \quad S = 4\pi a^2 \operatorname{sh}^2 x^1.$$

При увеличении x^1 они изменяются от нуля до бесконечности. По-прежнему $r = ax^1$ и может иметь сколь угодно большое значение;

$$\frac{l}{r} = 2\pi \frac{\operatorname{sh} x^1}{x^1} > 2\pi. \quad (3.1.31)$$

Объем пространства бесконечен. По этой причине пространства постоянной отрицательной кривизны называют *открытыми*. Они описываются *геометрией Лобачевского*, которую можно рассматривать как геометрию на гиперboloиде в 4-мерном евклидовом пространстве, отчего ее также называют *гиперболической*.

III. *Пространства нулевой кривизны* описываются метрикой

$$dl^2 = a^2((dx^1)^2 + (x^1)^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)), \quad (3.1.32)$$

т. е. являются плоскими или евклидовыми пространствами с хорошо известными свойствами. Напомним, что в евклидовом пространстве

$$\frac{l}{r} = 2\pi. \quad (3.1.33)$$

Контрольные задания

1. Непосредственной подстановкой компонент символов Кристоффеля (3.1.5)–(3.1.6) в выражение для ${}^4R_{00}$ убедиться в справедливости формулы (3.1.7).
2. Записать уравнения геодезических линий (дуг большого радиуса) в сферической геометрии Римана (3.1.27).
3. Записать уравнения геодезических линий в гиперболической геометрии Лобачевского (3.1.30).

§ 3.2. Однородные изотропные модели Вселенной

Вернемся к 4-мерному пространству-времени, описываемому уравнениями (3.1.13) и (3.1.14), и найдем решения этих уравнений для трех видов пространственных сечений.

3.2.1. Закрытая и открытые модели Фридмана

Начнем с рассмотрения трех видов однородных изотропных космологических моделей, полученных А. А. Фридманом (см. [11, с. 320–336]).

1. *Закрытая модель Фридмана* соответствует условиям:

$$B = \frac{2}{a^2} > 0; \quad \Lambda = 0; \quad p = 0. \quad (3.2.1)$$

В этом случае уравнения (3.1.13) и (3.1.14) принимают вид

$$-\frac{3}{a^4}(\ddot{a}a - \dot{a}^2) = \frac{\varkappa\rho c^2}{2}; \quad (3.2.2)$$

$$\frac{1}{a^4}(\ddot{a} + \dot{a}^2) + \frac{2}{a^2} = \frac{\varkappa\rho c^2}{2}. \quad (3.2.3)$$

Вычитая одно уравнение из другого, находим

$$2\ddot{a}a - \dot{a}^2 + a^2 = 0. \quad (3.2.4)$$

Производя замену $\dot{a}^2 = z(a)$, получаем решение

$$z(a) = (C_1 - a)a; \quad a = \frac{C_1}{2} [1 - \sin(C_2 + x^0)], \quad (3.2.5)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования. Выбирая C_2 так, чтобы при $x^0 = 0$ было $a = 0$, т. е. $C_2 = \pi/2$, и обозначая $C_1/2 = a_0$, имеем

$$a = a_0(1 - \cos x^0). \quad (3.2.6)$$

Интервал физического времени $d\tau$ определяется через времени-подобную координату x^0 выражением

$$d\tau = a dx^0.$$

Отсюда находим изменение времени через x^0 :

$$\tau = a_0(x^0 - \sin x^0). \quad (3.2.7)$$

Уравнения (3.2.6) и (3.2.7) определяют в плоскости (a, τ) циклоиду в параметрическом виде. Таким образом, полученное решение описывает модель с закрытыми пространственными сечениями, радиус кривизны которых «пульсирует» во времени (см. рис. 3.2).

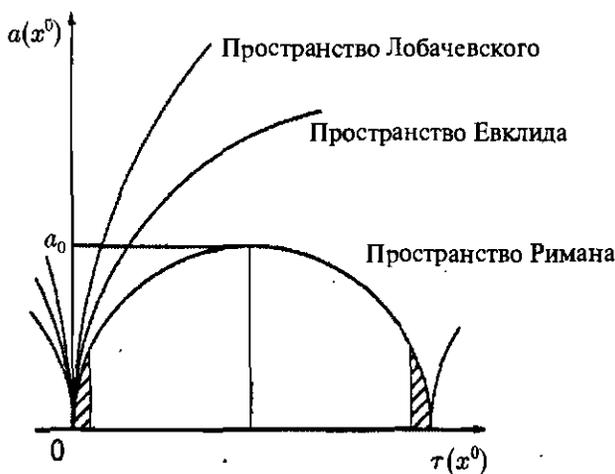


Рис. 3.2. Эволюция трех однородных изотропных космологических моделей Фридмана

Плотность материи получаем, например, из (3.2.2):

$$\rho = \frac{6}{\alpha a_0^2 c^2 (1 - \cos x^0)^3}. \quad (3.2.8)$$

При $x^0 = 0, 2\pi \dots$ (моменты времени $\tau = 0, 2\pi a_0 \dots$) плотность материи становится бесконечной, т. е. имеют место особенности. Это говорит о том, что правомерно рассматривать только один цикл циклоиды. Около особых точек, повидимому, выводы общей теории относительности теряют силу. Следует ожидать, что вблизи них при сверхплотных состояниях материи доминируют закономерности квантовой теории и физики элементарных частиц.

II. *Открытая модель Фридмана* соответствует условиям:

$$B = -\frac{2}{a^2} < 0; \quad \Lambda = 0; \quad p = 0. \quad (3.2.9)$$

Учитывая их, уравнения (3.1.13) и (3.1.14) можно записать в виде

$$-\frac{3}{a^4}(\ddot{a}a - \dot{a}^2) = \frac{\alpha \rho c^2}{2}; \quad (3.2.10)$$

$$\frac{1}{a^4}(\ddot{a} + \dot{a}^2) - \frac{2}{a^2} = \frac{\alpha \rho c^2}{2}. \quad (3.2.11)$$

Из них получаем уравнение для $a(x^0)$

$$2\ddot{a}a - \dot{a}^2 - a^2 = 0. \quad (3.2.12)$$

Решение имеет вид

$$a = \frac{C_1}{2} \left(\frac{1}{2} \left[C_2 \exp \{x^0\} + \frac{1}{C_2} \exp \{-x^0\} \right] - 1 \right), \quad (3.2.13)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования. Выбирая $C_2 = 1$ и обозначая $C_1 = a_0$, находим зависимость $a(\tau)$ в параметрическом виде

$$a = a_0 (\operatorname{ch} x^0 - 1); \quad (3.2.14)$$

$$\tau = a_0 (\operatorname{sh} x^0 - x^0). \quad (3.2.15)$$

Выбирая область изменения x^0 : $-\infty < x^0 < 0$, приходим к сжимающейся открытой модели Фридмана. При $0 < x^0 < \infty$ получаем расширяющуюся открытую модель Фридмана. Из уравнения (3.2.10) находим закон изменения плотности материи:

$$\rho = \frac{6}{\kappa a_0^2 c^2 (\operatorname{ch} x^0 - 1)^3}. \quad (3.2.16)$$

При $\tau \rightarrow 0$ ($x^0 \rightarrow 0$) плотность материи, как и в закрытой модели, стремится к бесконечности, что следует интерпретировать так, что закономерности классической общей теории относительности теряют силу в окрестности сингулярности.

III. Открытая плоская модель Фридмана соответствует условиям:

$$B = 0; \quad \Lambda = 0; \quad p = 0. \quad (3.2.17)$$

Учитывая их, уравнения (3.1.13) и (3.1.14) можно записать в виде

$$-\frac{3}{a^4} (\ddot{a}a - \dot{a}^2) = \frac{\kappa \rho c^2}{2}; \quad (3.2.18)$$

$$\frac{1}{a^4} (\ddot{a} + \dot{a}^2) = \frac{\kappa \rho c^2}{2}. \quad (3.2.19)$$

Из них получаем уравнение для $a(x^0)$

$$2\ddot{a}a - \dot{a}^2 = 0. \quad (3.2.20)$$

Решение имеет вид

$$a = (C_1 x^0 + C_2)^2, \quad (3.2.21)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования. Выбирая $C_2 = 0$ и обозначая $C_1^2 = a_0$, находим

$$\left(a = a_0 (x^0)^2; \quad \tau = \frac{a_0}{3} (x^0)^3 \right) \rightarrow \tau = \frac{1}{3\sqrt{a_0}} a^{3/2}. \quad (3.2.22)$$

3.2.2. Модели Эйнштейна и де Ситтера

1. *Статический цилиндрический мир Эйнштейна* явился первой космологической моделью Вселенной, построенной на основе общей теории относительности (см. [11, с. 287–298]). В тот момент Эйнштейн полагал, что однородное изотропное космологическое решение возможно лишь при добавлении в его уравнения космологического члена $\Lambda g_{\mu\nu}$. По этой причине величина Λ получила название *космологической постоянной*.

Космологической модели Эйнштейна соответствуют условия:

$$\dot{a} = 0 \quad (\text{статичность}); \quad \Lambda \neq 0; \quad p = 0. \quad (3.2.23)$$

Подставляя эти условия в (3.1.13) и (3.1.14), находим

$$0 = \frac{\varkappa \rho c^2}{2} - \Lambda; \quad (3.2.24)$$

$$B = \frac{\varkappa \rho c^2}{2} + \Lambda. \quad (3.2.25)$$

Отсюда получаем, что пространственное сечение (пространство) в этой модели имеет постоянную положительную кривизну (закрытая модель):

$$B = \frac{2}{a^2} = \varkappa \rho c^2 > 0; \quad \Lambda > 0; \quad a = \text{const}; \quad (3.2.26)$$

кроме того,

$$\rho = \frac{2}{\varkappa c^2 a^2} = \frac{2\Lambda}{\varkappa c^2}; \quad \Lambda = \frac{1}{a^2}. \quad (3.2.27)$$

Учитывая, что объем мира конечен, легко подсчитать массу всей материи в модели Эйнштейна:

$$M = \rho V = \frac{4\pi^2 a}{\varkappa c^2}. \quad (3.2.28)$$

II. *Модель де Ситтера* представляет собой другой вариант статической Вселенной (см. [11, с. 299–319]). Она описывает пустой мир (без материи), но с отличной от нуля космологической постоянной. Эту метрику можно записать в виде

$$ds^2 = \left(1 + \frac{\Lambda r^2}{3}\right) (dx^0)^2 - \frac{dr^2}{1 + \frac{\Lambda r^2}{3}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (3.2.29)$$

где выражение с космологической постоянной часто записывается иначе:

$$\Lambda \frac{r^2}{3} = -\frac{r^2}{R^2}. \quad (3.2.30)$$

Для сравнения метрики де Ситтера с ранее записанными в этой главе, удобнее ее переписать в иных видах.

- 1) Преобразованием координаты

$$r = R \sin x^1, \quad (3.2.31)$$

метрику (3.2.29) можно привести к виду

$$ds^2 = \cos^2 x^1 (dx^0)^2 - R^2 \left((dx^1)^2 + \sin^2 x^1 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right), \quad (3.2.32)$$

напоминающему метрику закрытой модели Вселенной.

- 2) Более рельефно проявляется смысл метрики де Ситтера при переходе к пяти новым координатам:

$$y_1 = r \sin \theta \cos \varphi; \quad y_2 = r \sin \theta \sin \varphi; \quad y_3 = r \cos \theta;$$

$$y_4 + y_0 = R e^{x^0/R} \cdot \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}; \quad y_4 - y_0 = R e^{-x^0/R} \cdot \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}, \quad (3.2.33)$$

позволяющим переписать (3.2.32) в виде

$$ds^2 = dy_0^2 - dy_1^2 - dy_2^2 - dy_3^2 - dy_4^2, \quad (3.2.34)$$

где на пять переменных наложено одно соотношение связи

$$y_0^2 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 = -R^2. \quad (3.2.35)$$

Это соотношение определяет пространство-время как 4-мерную гиперповерхность в 5-мерном многообразии.

3.2.3. Возможные однородные изотропные модели Вселенной

В самом общем случае космологическая постоянная Λ может быть положительной, отрицательной и нулевой. Кроме того, как было показано, возможны пространственные сечения трех типов. Итого, мы имеем девять возможных вариантов моделей однородной изотропной Вселенной. Сюда следует добавить различные виды уравнений состояния материи (соотношения между p и ρ). Не приводя подробных выкладок, изобразим на рис. 3.3 эволюцию во времени всех девяти возможных вариантов однородных изотропных моделей, причем с учетом обсуждаемых далее данных наблюдений укажем лишь те модели, которые хотя бы на отдельных этапах описывают расширение Вселенной. На всех графиках по оси ординат отложены значения a , а по оси абсцисс значения τ .

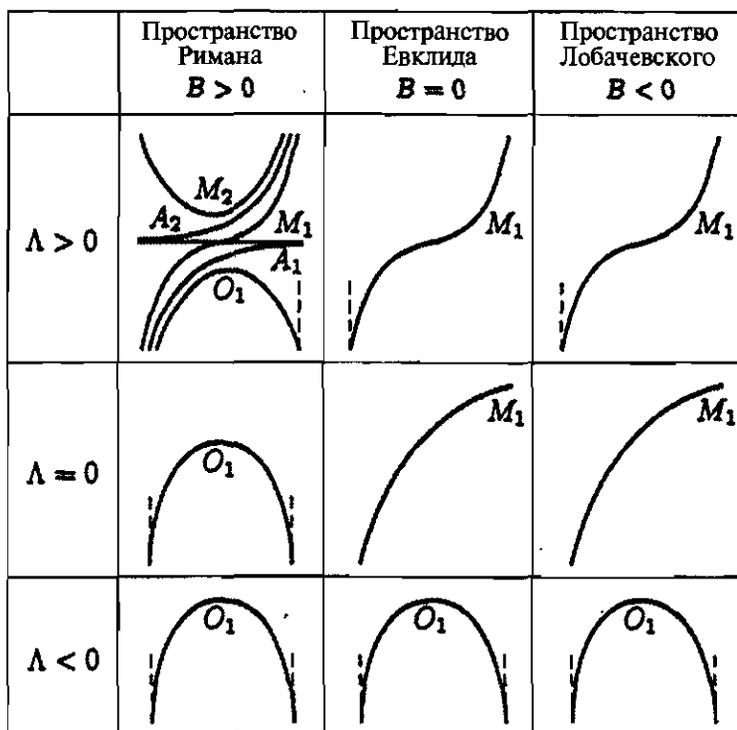


Рис. 3.3. Однородные изотропные космологические модели

Сделаем несколько замечаний.

- Статическое состояние однородной изотропной Вселенной невозможно (при $\Lambda \leq 0$) или оказывается неустойчивым (при $\Lambda > 0$) — в модели Эйнштейна.

- Отрицательная космологическая постоянная соответствует, если можно так выразиться, усилению космического притяжения, что приводит к замене расширения сжатием.

- Положительная космологическая постоянная соответствует некому космическому отталкиванию.

- При $\Lambda > 0$, $B > 0$, как видно из рис. 3.3, имеется несколько возможностей: неустойчивое статическое состояние, описываемое моделью Эйнштейна; ускоренное расширение от неустойчивого статического состояния; замена сжатия расширением; замедленное расширение; замена расширения сжатием (аналог закрытой модели Фридмана); извечное расширение от сингулярного состояния сначала с замедлением, а затем с ускорением.

Контрольное задание

Показать, что преобразование координат, предложенное Леметром и Робертсоном,

$$r' = \frac{r}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}} e^{-x^0/R}, \quad x^0 = x^0 + R \ln \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} \quad (3.2.36)$$

приводит метрику де Ситтера (3.2.29) к виду

$$ds^2 = (dx^0)^2 - e^{-2x^0/R} (dr'^2 + r'^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta \varphi^2)) \quad (3.2.37)$$

или после еще одного очевидного преобразования — к виду

$$ds^2 = (dx^0)^2 - e^{-2x^0/R} (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (3.2.38)$$

§ 3.3. Космология и астрофизика

Рассмотрим, насколько изложенные выше космологические модели соответствуют наблюдаемой реальности.

3.3.1. Космологическое красное смещение

1. На приведенном выше рисунке учтены лишь такие случаи эволюции Вселенной, которые хотя бы на некоторых этапах соот-

ветствуют расширению, что соответствует открытому в конце 20-х годов XX века Э. Хабблом космологическому красному смещению в спектрах далеких звезд. Этот факт интерпретируется как эффект Доплера, обусловленный разбеганием галактик от любого положения наблюдателя.

Рассмотрим этот эффект на основе космологических моделей Фридмана⁵⁾. Для этого выпишем квадрат интервала вдоль изотропной геодезической линии в метрике Фридмана (3.1.1). Выберем сферические координаты с началом в точке наблюдения так, чтобы звезда-источник излучения лежала в экваториальной плоскости ($\theta = \pi/2$), причем пусть $\varphi = 0$ и пусть ее радиальная координата $x^1 = r$. Так как материя <вморожена> в пространство, то в процессе эволюции Вселенной координаты звезды меняться не будут. В этом случае из квадрата интервала получаем

$$a^2(x^0)((dx^0)^2 - (dx^1)^2) = 0. \quad (3.3.1)$$

Отсюда находим

$$dx^0 = \pm dx^1 \rightarrow x^0 \mp x^1 = \text{const}. \quad (3.3.2)$$

Выпишем также условие изотропности волнового вектора излучения k^μ , который для случая распространения вдоль изотропной геодезической в выбранной координатной системе имеет отличные от нуля лишь две компоненты k^0 и k^1 :

$$k^\mu k^\nu g_{\mu\nu} = 0 \rightarrow a^2((k^0)^2 - (k^1)^2) = 0; \rightarrow k^0 = \pm k^1. \quad (3.3.3)$$

II. Уравнения изотропных геодезических в данной метрике при учете значений символов Кристоффеля (3.1.5)–(3.1.6) и соотношения компонент (3.3.3) сводятся к двум совпадающим уравнениям (компоненты $\langle 0 \rangle$ и $\langle 1 \rangle$):

$$k^\sigma \nabla_\sigma k^\mu = 0 \rightarrow k^0 \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^0} \pm \frac{\partial}{\partial x^1} \right) k^0 + 2k^0 \frac{\dot{a}}{a} \right] = 0. \quad (3.3.4)$$

Учтем, что физическое (наблюдаемое) значение энергии излучения определяется величиной (см. § 4.5)

$$\varepsilon = ak^0, \quad (3.3.5)$$

⁵⁾ Отметим, что более корректное рассмотрение данного эффекта производится на основе методов задания систем отсчета, рассмотренных в следующей главе 4.

уравнение (3.3.4) можно привести к виду

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^0} \pm \frac{\partial}{\partial x^1} \right) (a\varepsilon) = 0. \quad (3.3.6)$$

Решение этого уравнения

$$a\varepsilon = f(x^0 \mp x^1), \quad (3.3.7)$$

где $f(x^0 \mp x^1)$ — функция, определяющая форму светового сигнала.

III. Переходя от энергии $\varepsilon = h\nu$ к частотам ν и учитывая, что форма сигнала остается неизменной, приходим к соотношению частот в моменты испускания ($x^0 = x_{(1)}^0$) и в момент наблюдения ($x^0 = x_{(2)}^0$):

$$\nu_1 a(x_{(1)}^0) = \nu_2 a(x_{(2)}^0) \quad \rightarrow \quad \frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{a(x_{(1)}^0)}{a(x_{(2)}^0)}. \quad (3.3.8)$$

Поскольку изменение параметра δx^0 за время распространения сигнала от звезды до наблюдателя полагается малым по сравнению с его абсолютным значением x^0 (от начала эволюции), можно разложить $a(x_{(1)}^0)$ в ряд по разности значений:

$$a(x_{(1)}^0) \sim a(x_{(2)}^0) - \dot{a} \delta x^0. \quad (3.3.9)$$

Подставляя это выражение в (3.3.8), находим

$$\frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_1} = \frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{\dot{a}}{a} \delta x^0. \quad (3.3.10)$$

Величине δx^0 соответствует расстояние от излучателя до приемника

$$l = ac\delta x^0.$$

Отсюда получаем окончательную формулу

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{\dot{a}}{a^2} \frac{l}{c} \equiv -H \frac{l}{c}. \quad (3.3.11)$$

При расширении Вселенной (при $\dot{a} > 0$) изменение частоты отрицательное (красное смещение), а при сжатии — положительное (фиолетовое смещение).

Коэффициент пропорциональности H в (3.3.11) назван именем открывшего его Хаббла. По современным оценкам постоянная Хаббла имеет значение $H = \dot{a}/a^2 \sim 3 \cdot 10^{-18} \text{ с}^{-1}$.

3.3.2. Критическая плотность и возраст Вселенной

I. Возникает естественный вопрос, какой из названных трех моделей Фридмана описывается наш мир? Чтобы ответить на этот вопрос, вернемся к уравнениям Эйнштейна для однородных изотропных моделей (3.1.13), (3.1.14) при $\Lambda = 0$ и $p = 0$. Умножим (3.1.14) на \dot{h}^{ik} и сложим с (3.1.13). В результате получим

$$B = 2 \left(\frac{\varkappa \rho c^2}{3} - H^2 \right). \quad (3.3.12)$$

Отсюда находим, что пространство замкнуто ($B > 0$), если

$$\rho > \frac{3H^2}{\varkappa c^2} \equiv \rho_{cr} \sim 2 \cdot 10^{-29}, \quad (3.3.13)$$

и пространство открыто ($B > 0$), если

$$\rho < \frac{3H^2}{\varkappa c^2} \sim 2 \cdot 10^{-29} \quad (3.3.14)$$

(в граммах на кубический сантиметр).

В настоящий момент плотность наблюдаемой части Вселенной оценивается значением $\rho \sim 5 \cdot 10^{-31} \text{ г/см}^3$. Экстраполируя эти данные на всю Вселенную, приходим к выводу о соответствии данным наблюдений открытой модели Фридмана, где пространство описывается геометрией Лобачевского. Однако, скорее всего, при оценке ρ учитывается не вся материя. Неоднократно высказывались гипотезы о существовании новых видов материи (черных дыр, нейтрино с неравной нулю массой покоя, «темной материи», «темной энергии» и др.). По мере открытия новых объектов оценка средней плотности будет приближаться к критической. Окончательный вывод делать рано, но ряд астрофизических данных свидетельствует в пользу средней плотности, равной критической, т. е. к тому, что наш мир в целом (в сопутствующей системе отсчета) в среднем плоский.

II. Зная характер эволюции мира, можно сделать некоторые выводы о возрасте Вселенной. Если бы она всегда расширялась в наблюдаемом темпе, то для расширения до современного состояния в сопутствующей системе отсчета понадобилось бы $T_1 \sim 1/H \sim 10^{10}$

лет. На самом деле, как видно из графиков на рис. 3.2, в ранние этапы расширения должно было быть более быстрым, поэтому следует брать значение $T_2 \sim (2/3)T_1$. Это небольшой возраст, сравнимый с оценками возраста земной коры, даваемого геологами. Выход из этого противоречия ищется на основе более сложных космологических моделей и учета неких дополнительных обстоятельств.

III. В задачу данной книги не входит обсуждение последних астрофизических данных о факторах эволюции Вселенной. Заметим лишь, что они свидетельствуют о ряде трудностей классической геометрофизической картины устройства мира в целом. Для их преодоления оказались задействованы практически все возможные параметры используемой теории, в том числе и значение космологической постоянной. Концы с концами удается как-то связать, лишь привлекая гипотезы о наличии в космосе материи с неизвестными загадочными свойствами, называемой «темной материей» и «темной энергией». Такие гипотезы фактически перекладывают трудности из геометрии в физику микромира. Не исключено, что подобные обстоятельства свидетельствуют о пределах применимости постулатов общей теории относительности или постулатов, принятых при построении космологических моделей.

Более того, согласно универсальному правилу трактовки возникающих в физике бесконечностей, появление сингулярностей в космологических решениях в окрестностях «начала» или «конца» следует воспринимать как свидетельства того, что в этих областях эйнштейновская общая теория относительности теряет силу.

Рекомендуемая литература:

1. Черпащук А. М., Чернин А. Д. Вселенная, жизнь, черные дыры. Фрязино: Век-2, 2003.
2. Чернин А. Д. Темная энергия и всемирное антигравитационное // Успехи физических наук. 2008. Т. 178. № 3. С. 267–300.

Часть II

Системы отсчета и их применение

Глава 4

Системы отсчета в общей теории относительности

Анализ основ общей теории относительности показал, что к изложенному в первой части книги материалу следует добавить еще один блок идей, выявляющий роль систем отсчета в теории гравитации. Только после этого общая теория относительности становится в полной мере отвечающей своему названию — позволяет корректно описывать явления относительно произвольных систем отсчета.

При изложении основ общей теории относительности подчеркивалось, что назначение координат ограничено нумерацией точек-событий, а выбор координатной системы обусловлен соображениями удобства и, если это специально не оговорено, не имеет физического смысла. Однако все введенные в теорию объекты: векторы и тензоры произвольного ранга, через которые описываются физические величины, имеют компоненты, зависящие от выбора системы координат (способа нумерации точек), что порождает ряд вопросов. Каким образом можно сопоставить компоненты тензоров с величинами, которые измеряются наблюдателем (экспериментатором)? Какие величины поддаются измерению? Как зависят результаты измерений от состояния движения наблюдателя? Ответы на эти вопросы даются на основе понятия системы отсчета.

Системы отсчета не сводятся к координатным системам, а представляют собой дополнительную структуру, вводимую в математический аппарат общей теории относительности. Между понятиями систем отсчета и той или иной совокупностью систем координат можно установить соответствие специальным соглашением, однако оно имеет условный характер.

§ 4.1. Общековариантный монадный метод

Монадный метод описания систем отсчета в общей теории относительности был разработан в 50-х – 70-х годах XX века в трудах главным образом отечественных авторов: А. Л. Зельманова, Н. В. Мицкевича и других, в том числе и автора данной книги (см. [1, 5]).

4.1.1. Понятие системы отсчета

Метафизический анализ показывает, что любая физическая теория имеет дело с элементами (материальными образованиями или событиями) трех тесно связанных между собой видов:

- рассматриваемых объектов (событий),
- окружающего эти объекты мира и
- тела (системы) отсчета.

В предыдущей части книги были рассмотрены первый и второй (на примере точных решений) виды элементов. Данная часть посвящена изложению третьей составляющей всякой теории на основе монадного метода, обобщающего на случай искривленного пространства-времени традиционно понимаемые системы отсчета в классической теории (ньютоновой или в специальной теории относительности).

Уже из специальной теории относительности хорошо известно, что промежутки времени, расстояния между точками-событиями и компоненты тензорных величин в сравниваемых системах отсчета существенно зависят от относительной скорости этих систем. Назначением методов задания системы отсчета является описание зависимости результатов наблюдения от состояния движения наблюдателя.

Прежде всего, уточним, какой измерительной аппаратурой должен располагать наблюдатель. Анализ показывает, что, как минимум, он должен обладать часами и иметь возможность измерять временные составляющие тензорных величин, отделяя их от иных, пространственно-подобных компонент. Подчеркнем, что наблюдатель обладает этими возможностями именно в месте своего расположения, т. е. на своей времени-подобной мировой линии. Что касается других точек многообразия, то здесь используется традиционный прием — полагается, что имеется континуум наблюдателей, каждый из которых принимает и обрабатывает информацию на своих мировых линиях.

Поскольку каждому наблюдателю соответствует своя времени-подобная мировая линия и их пересечение означало бы, что в одной точке окажется два или больше наблюдателей, то ограничиваются лишь такими случаями, когда мировые линии, соответствующие разным наблюдателям, не пересекаются. В математике совокупность линий, когда через каждую точку проходит одна и только одна линия, принято называть *конгруэнцией линий*. В данном случае будем использовать конгруэнцию времени-подобных мировых линий.

Задание конгруэнции мировых линий влечет за собой возможность определения в каждой точке вектора τ^μ , касательного к соответствующей линии. Так как теория опирается на определение лишь одного вектора в каждой точке, данный метод получил название *монадного*¹⁾. Вдоль вектора монады определяется время системы отсчета, а ортогонально монаде — 3-мерное пространственное сечение. Таким образом можно сказать, что если в основу математического аппарата общей теории относительности положен принцип 4-мерной симметрии пространственных и временной координат, то методы задания систем отсчета опираются на обратную процедуру — на $(1+3)$ -расщепление 4-мерного пространственно-временного многообразия на время и ортогональное ему пространственное сечение (локально или глобально).

Сделаем несколько замечаний.

- Монадный метод нацелен на *разделение временных и пространственных компонент* тензорных величин, однако с его помощью нельзя ввести наблюдаемые величины по отдельным пространственно-подобным направлениям. Для решения таких задач необходимо наделять наблюдателя большими возможностями, что описывается посредством более полных — диадных и тетрадных методов.

¹⁾ Монадный метод возник в 1930-х годах в рамках 5-мерной теории гравитации и электромагнетизма как метод выделения из 5-мерного многообразия 4-мерного пространства-времени. В рамках 4-мерия для расщепления многообразия на время и 3-мерное пространство этот метод (в объеме алгебры) впервые был применен К. Эккартом в 1940 году. Затем элементы монадного метода развивались и использовались в работах Б. Лифа, А. Ульмана, Ф. Пирани, Г. Денена и других авторов. В полном виде монадный метод в специальной (хронометрической) калибровке впервые был построен А. Л. Зельмановым и затем независимо в трудах Э. Шмутцера и К. Каттансо.

• Переход от дискретного (конечного) множества реально осуществимых приборов наблюдателя к континууму идеализированных приборов-наблюдателей представляет собой процедуру такого же рода, как переход от дискретного множества материальных частиц или событий к континууму точек пространства-времени, когда только в части из них реализуются события.

• Особо подчеркнем, что *приборы-наблюдатели предполагаются пробными*, т. е. не влияющими на геометрию пространства-времени.

• Математический аппарат монадного метода задания систем отсчета целесообразно представить в виде следующих *трех частей*:

- 1 — алгебры монадного метода;
- 2 — определения монадных физико-геометрических тензоров, под которыми будем понимать тензорные величины, построенные из составляющих метрического тензора и их первых производных (в некотором смысле они выполняют роль символов Кристоффеля, однако являются настоящими тензорами);
- 3 — определения монадных операторов дифференцирования (монадный анализ).

Монадный метод опирается на представление всех основных (общековариантных) соотношений, уравнений и тождеств общей теории относительности исключительно через монадные величины и операторы. Ниже будут рассмотрены как общековариантная формулировка, так и два специальных случая (две калибровки) монадного метода, которые называются методами хронометрических и кинеметрических инвариантов.

4.1.2. Алгебра общековариантного монадного метода

Начнем с рассмотрения общековариантного монадного метода.

1. В одном и том же многообразии можно определить бесконечно много времени-подобных конгруэнций, каждой из которых соответствует своя система отсчета.

Пусть выбрана некая времени-подобная конгруэнция, тогда в каждой точке пространства-времени можно определить *единичный вектор* τ^μ вдоль касательной к соответствующей мировой линии (см. рис. 4.1). Вектор τ^μ имеет вполне определенный физический

смысл, — его следует понимать как 4-скорость u^μ соответствующего наблюдателя (прибора):

$$\tau^\mu \equiv u^\mu = \left(\frac{dx^\mu}{ds} \right)_c, \quad (4.1.1)$$

где dx^μ и ds взяты вдоль выбранной мировой линии системы отсчета, что отображено значком «с» снизу. По определению, вектор τ^μ обладает свойством 4-скорости (нормировки)

$$\tau^\mu \tau_\mu = g_{\mu\nu} \tau^\mu \tau^\nu = 1. \quad (4.1.2)$$

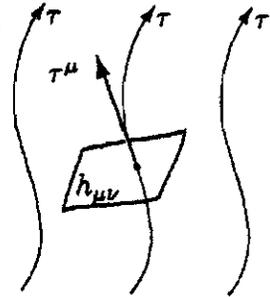


Рис. 4.1. Локальное (1 + 3)-расщепление пространства-времени

II. Продемонстрируем, как в рамках монадного метода математически осуществляется переход от произвольных тензорных величин к наблюдаемым *времени-подобным величинам* в избранной системе отсчета. Определим временную составляющую произвольного тензора $B_{\mu \dots}^{\nu \dots}$ как проекцию этого тензора по всем индексам на векторное поле τ^μ :

$$B = B_{\mu \dots}^{\nu \dots} \tau_\nu \dots \tau^\mu \dots \quad (4.1.3)$$

III. Для определения *пространственно-подобных* (и смешанных) компонент представим метрический тензор в виде

$$g_{\mu\nu} = \tau_\mu \tau_\nu - h_{\mu\nu}, \quad (4.1.4)$$

где $h_{\mu\nu}$, — очевидно, тензорная величина. Тогда справедливо также соотношение $g^{\mu\nu} = \tau^\mu \tau^\nu - h^{\mu\nu}$, где $h^{\mu\nu} = h_{\alpha\beta} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu}$. Отсюда и из (4.1.2) следует ортогональность τ_ν и $h^{\mu\nu}$:

$$\tau_\mu h^{\mu\nu} = \tau_\mu (\tau^\mu \tau^\nu - g^{\mu\nu}) = 0. \quad (4.1.5)$$

Легко видеть, что справедливы также соотношения:

$$\tau^\mu h_{\mu\nu} = \tau^\mu h_\mu^\nu = \tau_\mu h_\nu^\mu = 0,$$

где $h_\mu^\nu = h_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu}$.

Назовем *пространственно-спроецированным тензором* следующую величину, сопоставленную с произвольным тензором $B_{\mu \dots}^{\nu \dots}$:

$$\tilde{B}_{\beta \dots}^{\alpha \dots} = H_{\nu \dots \beta \dots}^{\alpha \dots \mu \dots} B_{\mu \dots}^{\nu \dots}, \quad (4.1.6)$$

где введен оператор пространственного проецирования

$$H_{\nu \dots \beta \dots}^{\alpha \dots \mu \dots} = (-1)^{n+m} h_{\nu}^{\alpha} \dots h_{\beta}^{\mu} \dots \quad (4.1.7)$$

Термин пространственно-спроецированный определен относительно системы отсчета и обоснован тем, что свертка по любому индексу тензора $\tilde{B}_{\beta \dots}^{\alpha \dots}$ с вектором τ_{μ} (временным направлением системы отсчета), по определению, равна нулю:

$$\tilde{B}_{\beta \dots}^{\alpha \dots} \tau_{\alpha} = \tilde{B}_{\beta \dots}^{\alpha \dots} \tau^{\beta} = 0.$$

Из произвольного тензора $B_{\mu \sigma \dots}^{\nu \lambda \dots}$ ранга $m+n$ можно образовать пространственно-спроецированные тензоры меньшего ранга («смешанные компоненты»), например:

$$\tilde{B}_{\beta \gamma \dots}^{\alpha \dots} = (-1)^{n+m-1} B_{\mu \sigma \dots}^{\nu \lambda \dots} \tau_{\nu} h_{\lambda}^{\alpha} \dots h_{\beta}^{\mu} h_{\gamma}^{\sigma} \dots \quad (4.1.8)$$

В монадном методе оперируют исключительно со скалярами и пространственно-спроецированными тензорами типа (4.1.3), (4.1.6) и (4.1.8).

IV. Образует из произвольного смещения dx^{μ} временную и пространственные составляющие: $d\tau = \tau_{\mu} dx^{\mu}$; $d\tilde{x}^{\nu} = -h_{\mu}^{\nu} dx^{\mu}$, тогда квадрат интервала можно представить в виде

$$ds^2 = (\tau_{\mu} \tau_{\nu} - h_{\mu\nu}) dx^{\mu} dx^{\nu} = d\tau^2 - h_{\mu\nu} d\tilde{x}^{\mu} d\tilde{x}^{\nu} \equiv d\tau^2 - dl^2. \quad (4.1.9)$$

Тензор $h_{\mu\nu}$ следует понимать как метрический тензор локального пространственно-подобного 3-мерного сечения, ортогонального τ^{μ} (рис. 4.1).

Несмотря на то, что 4-мерный тензор $h_{\mu\nu}$ в общем случае имеет 10 компонент, вследствие условия (4.1.5) независимыми являются только шесть. Кроме того, поскольку $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 4$, имеем

$$h^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = (\tau^{\mu} \tau^{\nu} - g^{\mu\nu})(\tau_{\mu} \tau_{\nu} - g_{\mu\nu}) = 3, \quad (4.1.10)$$

как и положено метрическому тензору в 3-мерном пространстве.

V. Заметим, что поднимать и опускать индексы у пространственно-спроецированных тензоров можно как 4-мерным метрическим тензором $g_{\mu\nu}$, так и 3-мерным тензором $h_{\mu\nu}$ с обратным знаком. Именно этим объясняется наличие коэффициента $(-1)^{n+m}$ в операторе пространственного проецирования (4.1.7).

4.1.3. Монадные физико-геометрические тензоры

Так же, как из $g_{\mu\nu}$ дифференцированием по координатам были получены символы Кристоффеля, из первых производных от τ^μ и $h_{\mu\nu}$ можно получить несколько новых величин. Три из них являются тензорами. Они характеризуют системы отсчета и названы *физико-геометрическими тензорами*.

I. Введем монадные физико-геометрические тензоры формальным образом. Для этого возьмем ковариантную производную от τ_μ и представим ее в виде суммы симметричной и антисимметричных частей:

$$\tau_{\mu;\nu} = \frac{\tau_{\mu,\nu} - \tau_{\nu,\mu}}{2} + \frac{\tau_{\mu;\nu} + \tau_{\nu;\mu}}{2}. \quad (4.1.11)$$

Так как нас интересуют лишь пространственно-спроецированные тензоры и скаляры, спроецируем два полученных тензора посредством τ^μ и h_α^μ всеми возможными способами:

$$(\tau_{\mu,\nu} - \tau_{\nu,\mu})\tau^\mu\tau^\nu = 0; \quad (\tau_{\mu;\nu} + \tau_{\nu;\mu})\tau^\mu\tau^\nu = 0; \quad (4.1.12)$$

$$a_\alpha \equiv -(\tau_{\mu,\nu} - \tau_{\nu,\mu})\tau^\nu h_\alpha^\mu = -(\tau_{\mu;\nu} + \tau_{\nu;\mu})\tau^\mu h_\alpha^\nu = \tau^\nu(\tau_{\alpha,\nu} - \tau_{\nu,\alpha}); \quad (4.1.13)$$

$$\omega_{\alpha\beta} \equiv \frac{\tau_{\mu,\nu} - \tau_{\nu,\mu}}{2} \cdot h_\alpha^\mu h_\beta^\nu; \quad (4.1.14)$$

$$d_{\alpha\beta} \equiv -\frac{\tau_{\mu;\nu} + \tau_{\nu;\mu}}{2} \cdot h_\alpha^\mu h_\beta^\nu = \frac{\tau^\lambda h_{\alpha\beta,\lambda} + h_{\alpha\lambda}\tau_{,\beta}^\lambda + h_{\beta\lambda}\tau_{,\alpha}^\lambda}{2}. \quad (4.1.15)$$

Таким образом, получились три тензорные величины: a_α , $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$, $d_{\alpha\beta} = d_{\beta\alpha}$.

Заметим что дифференцирование $h_{\alpha\beta}$ по координатам не приводит к новым величинам, так как

$$h_{\alpha\beta;\sigma} = (g_\alpha^\lambda \tau_\beta + g_\beta^\lambda \tau_\alpha)(\omega_{\lambda\sigma} - d_{\lambda\sigma} + a_\lambda \tau_\sigma); \quad h_{\alpha\beta;\sigma} h_\mu^\alpha h_\nu^\beta = 0. \quad (4.1.16)$$

II. Поясним *физический смысл* введенных тензоров. По определению, система отсчета представляет собой некую безмассовую сплошную среду из приборов, а τ_μ является 4-скоростью этих приборов. Тогда антисимметричный тензор $\omega_{\alpha\beta}$ следует считать *тензором угловой скорости вращения*, а симметричный тензор $d_{\alpha\beta}$ — *тензором скоростей деформаций* системы отсчета.

Для определения физического смысла a_α заметим, что выражение $\tau^\nu \tau_{;\nu}^\mu = a^\mu$ определяется изменением касательного вектора постоянной длины при смещении его вдоль мировой линии, что может быть лишь ортогональным к этому вектору. Из теоретической механики известно, что такая величина представляет собой вектор ускорения. Очевидно, что для случая, когда мировые линии системы отсчета являются геодезическими, $a_\mu = 0$. Таким образом, вектор a_μ следует интерпретировать как вектор ускорения системы отсчета относительно локально геодезической системы отсчета с осью времени вдоль τ^μ .

Данная здесь физическая интерпретация монадных тензоров подкрепляется видом уравнений геодезических линий и иных соотношений в монадном виде, записанных ниже.

4.1.4. Монадные операторы дифференцирования

Аналогично тому, как в римановой геометрии (в общей теории относительности), имеющей дело с тензорными величинами, операторы частного дифференцирования были заменены на операторы ковариантного дифференцирования, так и в монадном методе, имеющем дело лишь со скалярами и пространственно-спроецированными тензорами, операторы частного и ковариантного дифференцирования должны быть заменены на операторы, которые, действуя на пространственно-спроецированные тензоры (и скаляры), приводят опять к пространственно-спроецированным тензорам, т. е. не выводят за пределы класса тех величин, в терминах которых записывается теория.

Из оператора ковариантного дифференцирования ∇_σ , оператора пространственного проецирования $H_{\mu\cdots\beta\cdots}^{\nu\cdots\alpha\cdots}$ и вектора τ^σ можно образовать два характерных для монадного метода оператора дифференцирования, не выводящие за пределы класса пространственно-спроецированных тензоров:

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_T \tilde{B}_{\beta\cdots}^{\nu\cdots} &\equiv H_{\mu\cdots\beta\cdots}^{\nu\cdots\alpha\cdots} \tau^\sigma (\nabla_\sigma \tilde{B}_{\alpha\cdots}^{\mu\cdots}); \\ \tilde{\nabla}_\lambda \tilde{B}_{\beta\cdots}^{\nu\cdots} &\equiv -H_{\mu\cdots\beta\cdots}^{\nu\cdots\alpha\cdots} h_\lambda^\sigma (\nabla_\sigma \tilde{B}_{\alpha\cdots}^{\mu\cdots}).\end{aligned}\tag{4.1.17}$$

Первый из них следует назвать *оператором ковариантного временного дифференцирования*, а второй — *оператором ковариантного пространственного дифференцирования*.

Однако, в монадном методе вместо ковариантного временного дифференцирования используется другой оператор, называемый *оператором монадного временного дифференцирования* ∂_T , связанный с первым соотношением:

$$\partial_T \tilde{B}_{\beta \dots}^{\nu \dots} = \tilde{\nabla}_T \tilde{B}_{\beta \dots}^{\nu \dots} + (\omega_{\sigma}^{\nu} - d_{\sigma}^{\nu}) \tilde{B}_{\beta \dots}^{\sigma \dots} + \dots - (\omega_{\beta}^{\sigma} - d_{\beta}^{\sigma}) \tilde{B}_{\sigma \dots}^{\nu \dots} - \dots \quad (4.1.18)$$

Очевидно, что этот оператор общековариантен. Использование именно этого оператора обусловлено рядом обстоятельств, прежде всего тем, что при записи тензорных выражений общей теории относительности в монадном виде он оказывается в тех местах, где в соответствующих ньютоновых или спецрелятивистских выражениях обычно пишется дифференцирование по времени²⁾.

Оператор монадного временного дифференцирования можно записать в форме:

$$\partial_T \tilde{B}_{\beta \dots}^{\nu \dots} = \tau^{\sigma} \frac{\partial \tilde{B}_{\beta \dots}^{\nu \dots}}{\partial x^{\sigma}} - N_{\sigma}^{\nu} \tilde{B}_{\beta \dots}^{\sigma \dots} - \dots + N_{\beta}^{\sigma} \tilde{B}_{\sigma \dots}^{\nu \dots} + \dots, \quad (4.1.19)$$

где

$$N_{\mu}^{\nu} = \frac{\partial \tau^{\nu}}{\partial x^{\mu}} - \tau^{\nu} a_{\mu} \quad (4.1.20)$$

— своеобразная связность временного дифференцирования. В общем случае этот оператор зависит от ранга и ковариантности дифференцируемых величин.

Оператор ковариантного пространственного дифференцирования представляется в виде:

$$\tilde{\nabla}_{\lambda} \tilde{B}_{\beta \dots}^{\nu \dots} = -h_{\lambda}^{\sigma} \left[\frac{\partial \tilde{B}_{\beta \dots}^{\nu \dots}}{\partial x^{\sigma}} + (L_{\delta\sigma}^{\nu} + h_{\delta,\sigma}^{\nu}) \tilde{B}_{\beta \dots}^{\delta \dots} + \dots \right. \\ \left. \dots + (L_{\alpha\sigma}^{\delta} h_{\beta}^{\alpha} + h_{\beta,\sigma}^{\delta}) \tilde{B}_{\delta \dots}^{\nu \dots} + \dots \right], \quad (4.1.21)$$

где

$$L_{\delta\sigma}^{\nu} = \frac{h^{\nu\lambda}}{2} (h_{\lambda\delta,\sigma} + h_{\lambda\sigma,\delta} - h_{\delta\sigma,\lambda}) \quad (4.1.22)$$

— «связность» ковариантного пространственного дифференцирования.

²⁾ Другим важным обстоятельством, заставляющим выделить этот оператор, является то, что так определенное выражение оказывается пространственно-спроецированным оператором Ли — важным оператором в дифференциальной геометрии (см. § 5.1).

Выпишем результат действия введенных операторов на 3-мерный метрический тензор:

$$\partial_T h_{\mu\nu} = 2d_{\mu\nu}; \quad \partial_T h^{\mu\nu} = -2d^{\mu\nu}; \quad \tilde{\nabla}_\lambda h_{\mu\nu} = 0, \quad (4.1.23)$$

т. е. действие оператора ковариантного пространственного дифференцирования на 3-мерный метрический тензор, как и следовало ожидать, дает нуль.

Ковариантные производные от произвольных тензоров всегда можно записать через введенные здесь монадные операторы и физико-геометрические тензоры.

Контрольные задания

1. Показать справедливость следующих соотношений между монадными физико-геометрическими тензорами:

$$\tau_{\mu;\nu} = \omega_{\mu\nu} - d_{\mu\nu} + a_\mu \tau_\nu; \quad \tau^\mu \tau_{\mu;\nu} = 0; \quad \tau^\nu \tau_{;\nu}^\mu = a^\mu; \quad (4.1.24)$$

$$\omega_{\mu\nu} = \frac{\tau_{\mu;\nu} - \tau_{\nu;\mu}}{2} + \frac{\tau_\mu a_\nu - \tau_\nu a_\mu}{2}. \quad (4.1.25)$$

2. Показать, что символы Кристоффеля можно записать через введенные монадные величины в виде:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = L_{\alpha\beta}^\mu + \frac{h_{\alpha,\beta}^\mu + h_{\beta,\alpha}^\mu}{2} + d_{\alpha\beta} + a^\mu \tau_\alpha \tau_\beta - \frac{\tau^\mu (a_\alpha \tau_\beta + a_\beta \tau_\alpha)}{2} + \\ + (\tau_\alpha \omega_{\nu;\beta}^\mu + \tau_\beta \omega_{\nu;\alpha}^\mu) - \frac{\tau_\alpha \tau_{;\beta}^\mu + \tau_\beta \tau_{;\alpha}^\mu}{2}, \quad (4.1.26)$$

где трехмерные символы Кристоффеля $L_{\alpha\beta}^\mu$ записаны в (4.1.22). Поскольку символы Кристоффеля не являются тензорами, то в их записи присутствуют «лишние», т. е. нетензорные слагаемые.

3. Показать, что ковариантная производная от произвольного вектора B_ν (не спроецированного) в монадном виде записывается следующим образом:

$$\nabla_\mu B_\nu = \tilde{\nabla}_\mu (B \tau_\nu + \tilde{B}_\nu) = \tau_\nu (\tau_\mu \partial_T B - \tilde{\nabla}_\mu B) - \\ - (\omega_{\mu\nu} + d_{\mu\nu} - \tau_\mu a_\nu) B + (\tilde{\nabla}_\mu + \tau_\mu \partial_T) \tilde{B}_\nu - \\ - (\tau_\mu (\omega_{\nu;\lambda}^\lambda - d_\nu^\lambda) + \tau_\nu (\omega_{\mu;\lambda}^\lambda - d_\mu^\lambda) + \tau_\mu \tau_\nu a^\lambda) \tilde{B}_\lambda. \quad (4.1.27)$$

§ 4.2. Метод хронометрических инвариантов

При практическом применении монадного метода возникает ряд вопросов, главным из которых является задание конгруэнции

мировых линий системы отсчета. Их можно определять при помощи специальных уравнений, однако можно поступать проще, используя уже готовые конгруэнции времени-подобных линий x^0 координатной системы.

4.2.1. Алгебра метода хронометрических инвариантов

I. Всегда можно специальным образом так подобрать координатную систему, чтобы конгруэнция линий x^0 , задаваемая условиями

$$x^i = \text{const}^i,$$

совпадала с конгруэнцией мировых линий используемой системы отсчета (см. рис. 4.2).

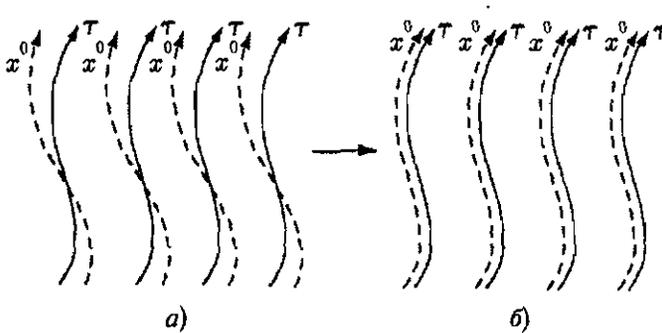


Рис. 4.2. В общем случае имеются две конгруэнции времени-подобных линий: τ и x^0 ($x^i = \text{const}^i$) (а). В хронометрических системах координат конгруэнции τ и x^0 совпадают (б)

Назовем координатные системы, таким образом привязанные к системе отсчета, *хронометрическими*. В них вектор τ^μ имеет только одну отличную от нуля компоненту — с индексом «0», т. е.

$$\tau^\mu = \{\tau^0, 0, 0, 0\}.$$

Учитывая условие нормировки (4.1.2), находим контравариантные компоненты монады («калибруем» монаду хронометрическим образом):

$$g_{\mu\nu} \tau^\mu \tau^\nu = g_{00} \tau^0 \tau^0 \approx 1 \quad \rightarrow \quad \tau^\mu = \frac{g_0^\mu}{\sqrt{g_{00}}}. \quad (4.2.1)$$

II. Из алгебраических соотношений (4.1.4) легко выразить компоненты τ_μ и $h_{\mu\nu}$ через компоненты метрического тензора $g_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} \tau_\mu = \tau^\nu g_{\mu\nu} &= \frac{g_{0\mu}}{\sqrt{g_{00}}}; & h_0^\mu &= 0; & h_i^0 &= \frac{g_{0i}}{g_{00}}; & h_k^i &= -g_k^i; \\ h^{ik} &= -g^{ik}; & h^{0i} &= -g^{0i}; & h^{00} &= \frac{1 - g_{00}g^{00}}{g_{00}}. \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Обратим особое внимание на ковариантные компоненты тензора $h_{\mu\nu}$:

$$h_{ik} = \frac{g_{0i}g_{0k}}{g_{00}} - g_{ik}; \quad h_{0\mu} = 0, \quad (4.2.3)$$

у которых отличны от нуля лишь компоненты с пространственными индексами $i, k = 1, 2, 3$, как это и следовало ожидать от 3-мерного метрического тензора.

III. Условие совпадения конгруэнций τ и x^0 выделяет не одну, а целый класс хронометрических систем координат, связанных друг с другом специальными хронометрическими преобразованиями координат. Эти преобразования находятся из условия $\tau^i = 0$ во всех хронометрических системах координат:

$$\tau^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^\alpha} \tau^\alpha = \frac{\partial x^i}{\partial x^0} \tau^0 = 0 \rightarrow \frac{\partial x^i}{\partial x^0} = 0, \quad (4.2.4)$$

и имеют вид:

$$x^0 = x'^0(x^0, x^1, x^2, x^3); \quad (4.2.5)$$

$$x^i = x'^i(x^1, x^2, x^3). \quad (4.2.6)$$

IV. Хронометрические преобразования дополняются до произвольных допустимых (1.1.1) следующими преобразованиями:

$$x^i = x'^i(x^0, x^1, x^2, x^3), \quad (4.2.7)$$

которые приводят к расщеплению единой конгруэнции на две: исходную конгруэнцию τ , совпадавшую с конгруэнцией x^0 , остающуюся неизменной, и новую времени-подобную конгруэнцию x'^0 . Если новую координатную конгруэнцию x'^0 объявить совпадающей с конгруэнцией другой системы отсчета τ' , то тогда можно сказать, что

преобразованиями координат (4.2.7) описывается переход от одной системы отсчета к другой. Однако при этом не следует забывать, что сами по себе преобразования координат автоматически не означают перехода к новой системе отсчета, — о переходе можно говорить лишь после отождествления второй координатной конгруэнции с конгруэнцией новой системы отсчета. Но последнего можно и не делать.

Таким образом, наряду с хронометрическими системами координат, привязанными к какой-то исходной конгруэнции системы отсчета, можно говорить и о хронометрической системе отсчета определяемой конгруэнцией линий времени ($x^i = \text{const}^i$) заданной системы координат. Тогда можно сказать, что преобразования (4.2.7) описывают переходы между хронометрическими системами отсчета, а (4.2.5) и (4.2.6) оставляют в рамках одной и той же хронометрической системы отсчета.

V. В хронометрических системах координат проецирование произвольного тензора $B_{\nu \dots}^{\mu \dots}$ ранга $m + n$ на направление τ , вследствие калибровки (4.2.1), состоит в следующем:

$$B = B_{\nu \dots}^{\mu \dots} \tau_{\mu} \dots \tau^{\nu} \dots = \frac{B_{00 \dots 0}}{(n+m)/2}, \quad (4.2.8)$$

Все контравариантные «пространственные» компоненты $B^{i \dots k}$ произвольного тензора являются пространственно-спроецированными:

$$B^{i \dots k} = B^{\mu \dots \nu} (-1)^n h_{\mu}^i \dots h_{\nu}^k = B^{i \dots k}, \quad (4.2.9)$$

так как, согласно (4.2.2), $h_0^i = 0$, $h_k^i = -g_k^i$. Все ковариантные компоненты пространственно-спроецированных тензоров имеют только 3-мерные компоненты и образуются опусканием индексов у компонент (4.2.9) посредством 3-мерного метрического тензора h_{ik} :

$$\tilde{B}_{i \dots k} = (-1)^n B^{j \dots s} h_{ji} \dots h_{sk}. \quad (4.2.10)$$

Аналогично из произвольного тензора $B_{\alpha \dots \beta}^{\mu \dots \nu}$ ранга n можно образовать компоненты пространственно-спроецированных тензоров меньшего ранга m , например:

$$\tilde{B}^{i \dots k} = (-1)^m B_{\mu \dots \lambda}^{\nu \dots \sigma} \tau^{\mu} \dots h_{\nu}^i \dots h_{\lambda}^k = \frac{B_{0 \dots 0}^{i \dots k}}{(g_{00})^{(n-m)/2}}. \quad (4.2.11)$$

Из рассмотренного следует, что в хронометрических системах координат пространственно-спроецированные тензоры соответствующего ранга определяются величинами только с 3-мерными компонентами ($i, k \dots = 1, 2, 3$) этого же ранга, согласно формулам (4.2.9)–(4.2.10), а времени-спроецированные компоненты — ковариантными компонентами с индексом 0, согласно (4.2.8).

VI. Указанные выше спроецированные величины в хронометрических системах координат обладают замечательными свойствами: они инвариантны при произвольных преобразованиях координаты x^0 (4.2.5) и ковариантны относительно чисто пространственных преобразований координат (4.2.6). Первое называют свойством хронометрической инвариантности, а сами величины (4.2.8)–(4.2.11) — *хронометрически инвариантными (х.и.) 3-тензорами* или, иначе, *хронометрическими инвариантами*.

Это свойство указанных величин продемонстрируем на примере произвольного вектора B^μ . Рассмотрим изменения различных его компонент при преобразованиях (4.2.5) и (4.2.6):

$$B'_0 = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^0} B_\mu = \frac{\partial x^0}{\partial x'^0} B_0; \quad B'_k = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^k} B_\mu = \frac{\partial x^0}{\partial x'^k} B_0 + \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} B_i;$$

$$B'^k = \frac{\partial x'^k}{\partial x^\mu} B^\mu = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} B^i; \quad B'^0 = \frac{\partial x'^0}{\partial x^\mu} B^\mu = \frac{\partial x'^0}{\partial x^0} B^0 + \frac{\partial x'^0}{\partial x^i} B^i.$$

Учитывая, что $g'_{00} = g_{00}(\partial x^0 / \partial x'^0)^2$, убеждаемся в инвариантности $B_0 / \sqrt{g_{00}}$. Очевидно, что B^k ковариантно относительно 3-мерных преобразований. Компоненты из 2-й и 3-й строк не обладают свойством хронометрической инвариантности.

В хронометрической инвариантности h_{ik} убедиться нетрудно. Легко показать также, что произведение хронометрически инвариантных величин также хронометрически инвариантно.

4.2.2. Физико-геометрические тензоры и операторы дифференцирования в хронометрической калибровке

I. Запишем монадные физико-геометрические тензоры в хронометрических системах координат (в хронометрической калибровке).

Очевидно, что они хронометрически инвариантны и имеют вид:

$$\begin{aligned} {}^*a_i &= \tau^0 (\tau_{i,0} - \tau_{0,i}); \\ {}^*\omega_{ik} &= \frac{\tau_{i,k} - \tau_{k,i}}{2} + \frac{{}^*a_k \tau_i - {}^*a_i \tau_k}{2}; \\ {}^*d_{ik} &= \frac{\tau^0 h_{ik,0}}{2}. \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

Здесь и в дальнейшем шестиконечной звездочкой слева вверху будем обозначать монадные величины и операторы в хронометрической калибровке.

II. В хронометрической калибровке вследствие того, что ${}^*N_i^k = 0$, существенно упрощается оператор монадного временного дифференцирования (4.1.19):

$${}^*\partial_T \tilde{B}_{k \dots}^{i \dots} = \tau^0 \frac{\partial \tilde{B}_{k \dots}^{i \dots}}{\partial x^0} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \frac{\partial \tilde{B}_{k \dots}^{i \dots}}{\partial x^0}. \quad (4.2.13)$$

Он не зависит от ранга и ковариантности дифференцируемой величины.

III. Для записи монадного пространственного ковариантного дифференцирования учтем, что в формуле (4.1.21) теперь $h_{k,\sigma}^i = 0$, а 3-мерные связности можно представить в виде

$$-h_i^\sigma h_\sigma^\nu L_{\nu\sigma}^k \equiv \Delta_{is}^k = \frac{h^{ki}}{2} ({}^*\partial_i h_{is} + {}^*\partial_s h_{ii} - {}^*\partial_i h_{is}), \quad (4.2.14)$$

где Δ_{is}^k — дополнительная к монадным физико-геометрическая величина; значком ${}^*\partial_i$ здесь обозначен новый хронометрически инвариантный оператор пространственного дифференцирования:

$${}^*\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{g_{0i}}{g_{00}} \frac{\partial}{\partial x^0}, \quad (4.2.15)$$

также не зависящий от ранга и ковариантности дифференцируемой величины. В результате для оператора ${}^*\tilde{\nabla}_s$ (4.1.21) находим

$${}^*\tilde{\nabla}_s \tilde{B}_{i \dots}^{k \dots} = {}^*\partial_s \tilde{B}_{i \dots}^{k \dots} + \Delta_{si}^k \tilde{B}_{i \dots}^{k \dots} + \dots - \Delta_{sl}^i \tilde{B}_{i \dots}^{k \dots} - \dots \equiv {}^*\nabla_s \tilde{B}_{i \dots}^{k \dots}, \quad (4.2.16)$$

что совпадает с общепринятым определением ковариантной производной лишь с той разницей, что все частные производные заменены на оператор пространственного дифференцирования (4.2.15).

Контрольные задания

1. Непосредственным вычислением убедиться в хронометрической инвариантности оператора пространственного дифференцирования (4.2.15).
2. Записать метрику Шварцшильда (2.1.28) в новых координатах, связанных с координатами кривизн преобразованиями:

$$x'^0 = x^0; \quad r' = r; \quad \theta' = \theta; \quad \varphi' = \varphi - \Omega x^0. \quad (4.2.17)$$

Найти физико-геометрические тензоры в хронометрически определенной системе отсчета для метрики Шварцшильда в новых координатах.

3. Показать, что переход от одной хронометрической системы отсчета к другой хронометрической, движущейся относительно первой со скоростью v^k , описывается преобразованием координат:

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^0} = -\frac{v^k \sqrt{g_{00}}}{1 - \frac{g_{0j}}{\sqrt{g_{00}}} v^j} \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}; \quad \text{или, обратным} \quad (4.2.18)$$

$$\frac{\partial x^k}{\partial x'^0} = -\frac{v^k \sqrt{g_{00}}}{1 - \frac{g_{0j}}{\sqrt{g_{00}}} v^j} \frac{\partial x^0}{\partial x'^j}.$$

Замечание. Эта задача подробно рассмотрена в [1, с. 71–74].

§ 4.3. Метод кинеметрических инвариантов

Имеется иной способ привязки координатных систем к конгруэнции системы отсчета, также связанный с выделением группы координатных преобразований. Однако этот способ, в отличие от случая хронометрической калибровки, не является универсальным, а пригоден лишь для привилегированного класса систем отсчета, в какой-то мере заменяющего понятие инерциальных систем отсчета в механике Ньютона или в специальной теории относительности. Этот привилегированный класс систем отсчета будем называть *нормальными системами отсчета*.

4.3.1. Алгебра метода кинематических инвариантов

I. Для нормальных систем отсчета характерно не локальное, как в методе хронометрических инвариантов, а глобальное расщепление 4-мерного пространственно-временного многообразия на направления времени и на совокупность ортогональных времени 3-мерных пространственных гиперповерхностей, которые в общем случае задаются одним уравнением

$$f_{(\lambda)}(x^\nu) = 0, \quad (4.3.1)$$

где λ — некий параметр, нумерующий гиперповерхности данной совокупности. Из уравнения (4.3.1) легко найти нормали к пространственным гиперповерхностям, которые пропорциональны времени-подобной монаде данной системы отсчета (рис. 4.3):

$$b(x)\tau_\mu = \frac{\partial f_{(\lambda)}(x^\nu)}{\partial x^\mu}, \quad (4.3.2)$$

где $b(x)$ — скалярная функция координат.

Воспользуемся тем, что при так или иначе заданной координатной системе всегда можно определить совокупность пространственно-подобных гиперповерхностей, для которой нумерующим параметром λ является координата x^0 , тогда имеем

$$f_{(\lambda)}(x^\nu) = 0 \rightarrow x^0 = \text{const.} \quad (4.3.3)$$

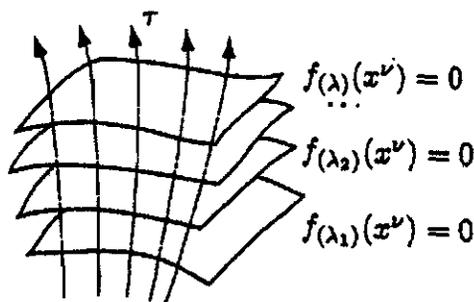


Рис. 4.3. Глобальное (1+3)-расщепление пространства-времени в нормальных системах отсчета на линии времени и совокупность 3-мерных пространственно-подобных гиперповерхностей

Подставляя это уравнение гиперповерхностей в (4.3.2), находим, что в таком случае $\tau_i = 0$. Координатные системы, привязанные к нормальной конгруэнции мировых линий системы отсчета посредством уравнений пространственных гиперповерхностей с нормальными вдоль τ_μ , назовем *кинеметрическими*.

II. Учитывая условия нормировки

$$\tau_\mu \tau_\nu g^{\mu\nu} = 1,$$

находим ковариантные компоненты τ_μ («калибруем» монаду кинеметрическим образом):

$$\tau_\mu = \frac{g_\mu^0}{\sqrt{g^{00}}}. \quad (4.3.4)$$

Из алгебраических соотношений (4.1.4) однозначно выражаются все компоненты τ^μ и тензора $h_{\mu\nu}$ через компоненты метрического тензора $g_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} \tau^\mu &= \frac{g^{0\mu}}{\sqrt{g^{00}}}; & h_\mu^0 &= 0; & h_0^i &= \frac{g^{0i}}{g^{00}}; & h_i^k &= -g_i^k; \\ h_{ik} &= -g_{ik}; & h_{0i} &= -g_{0i}; & h_{00} &= \frac{1 - g_{00}g^{00}}{g^{00}}. \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

Отдельно выпишем компоненты контравариантного 3-мерного метрического тензора

$$h^{ik} = \frac{g^{0i}g^{0k}}{g^{00}} - g^{ik}; \quad h^{0\mu} = 0, \quad (4.3.6)$$

имеющего отличными от нуля лишь компоненты с пространственными индексами. Легко видеть, что формулы (4.3.4)–(4.3.6) аналогичны соответствующим формулам (4.2.1)–(4.2.3) в методе хронометрических инвариантов, отличаясь от них заменой ковариантных индексов на контравариантные.

III. Кинеметрическая система координат определена неоднозначно; для одной и той же нормальной конгруэнции τ имеется набор кинеметрических координатных систем, определяемых из условия:

$$\tau'_i = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^i} \tau_\alpha = \frac{\partial x^0}{\partial x'^i} \tau_0 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial x^0}{\partial x'^i} = 0. \quad (4.3.7)$$

Отсюда следует, что координатные системы, кинематрическим образом привязанные к одной и той же нормальной системе отсчета, связаны преобразованиями:

$$x^{i0} = x^{i0}(x^0); \quad (4.3.8)$$

$$x^{ii} = x^{ii}(x^0, x^1, x^2, x^3). \quad (4.3.9)$$

Назовем эти преобразования *кинематрическими*.

IV. Легко видеть, что в этих формулах координаты x^0 и пространственные x^i переставлены местами с соответствующими координатами в хронометрических преобразованиях (4.2.5)–(4.2.6). Преобразования (4.3.9) оказались дополнительными к хронометрическим; ранее они описывали переходы между хронометрическими системами отсчета, а теперь они соответствуют преобразованиям внутри одной и той же нормальной системы отсчета. Дополнительными к кинематрическим являются преобразования

$$x^{i0} = x^{i0}(x^0, x^1, x^2, x^3), \quad (4.3.10)$$

где в качестве аргумента обязательно присутствуют координаты с пространственным индексом. Такое преобразование исходной кинематрической системы координат приводит к новой совокупности пространственно-подобных гиперповерхностей $x^{i0} = \text{const}$, в которой можно определить по формулам (4.3.5) новую ортогональную к ним конгруэнцию времени-подобных линий τ^i , где $\tau_\mu^i = g_\mu^{i0} / \sqrt{g^{00}}$. С этой времени-подобной конгруэнцией можно связать вторую нормальную систему отсчета, тогда преобразование координат (4.3.10) описывает переход между нормальными системами отсчета, но только при соглашении, что с исходной и результирующей системами координат связаны системы отсчета согласно калибровке (4.3.4). Систему отсчета, ассоциированную со взятой координатной системой согласно формулам (4.3.4)–(4.3.6), назовем *кинематрической системой отсчета*.

Следовательно, преобразования координат (4.3.8), (4.3.9) соответствуют одной и той же кинематрической системе отсчета, а (4.3.10) описывают переходы между различными кинематрическими системами отсчета. Различие между преобразованиями (4.2.7) и (4.3.10)

еще раз свидетельствует о том, что *переходы между системами отсчета связаны с преобразованиями координат только при наличии дополнительных соглашений, причем последние могут быть различными.*

V. В кинеметрических системах координат проецирование произвольного тензора $B_{\nu}^{\mu \dots}$ ранга $m + n$ на направление τ состоит в определении величины

$$B = B_{\nu}^{\mu \dots} \tau_{\mu} \dots \tau^{\nu} \dots = \frac{B^{00 \dots 0}}{(g^{00})^{n/2}}. \quad (4.3.11)$$

Все ковариантные «пространственные» компоненты $B_{ik \dots}$ произвольного тензора автоматически являются пространственно-спроецированными:

$$\tilde{B}_{i \dots k} = B_{\mu \dots \nu} (-1)^n h_i^{\mu} \dots h_k^{\nu} = B_{\mu \dots \nu} g_i^{\mu} \dots g_k^{\nu} = B_{i \dots k}, \quad (4.3.12)$$

так как, согласно (4.3.5), $h_i^0 = 0$, $h_i^{\mu} = -g_i^{\mu}$. Все контравариантные компоненты пространственно-спроецированных тензоров имеют только индексы 1, 2, 3 и образуются поднятием индексов у компонент (4.3.12) посредством 3-мерного метрического тензора h^{ik} .

Из произвольного тензора $B_{\nu}^{\mu \dots}$ ранга n можно построить компоненты пространственно-спроецированных тензоров меньшего ранга m , например:

$$\tilde{B}_{i \dots k} = \frac{B_{i \dots k}^{0 \dots 0}}{(g^{00})^{(n-m)/2}}. \quad (4.3.13)$$

VI. Пространственно-спроецированные тензоры в кинеметрических системах координат обладают свойством кинеметрической инвариантности: они инвариантны при преобразованиях (4.3.8) и пространственно-ковариантны относительно преобразований координат (4.3.9). Эти величины будем называть *кинеметрически инвариантными (к. и.) тензорами.*

Как и в случае метода хронометрических инвариантов, продемонстрируем свойства кинеметрической инвариантности на примере произвольного вектора B^{μ} . Рассмотрим изменения различных его компонент при преобразованиях (4.3.8) и (4.3.9):

$$B'_k = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^k} B_{\mu} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} B_i; \quad B'_0 = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^0} B_{\mu} = \frac{\partial x^0}{\partial x'^0} B_0 + \frac{\partial x^k}{\partial x'^0} B_k;$$

$$B^{i0} = \frac{\partial x^{i0}}{\partial x^\mu} B^\mu = \frac{\partial x^{i0}}{\partial x^0} B^0; \quad B^{ik} = \frac{\partial x^{ik}}{\partial x^\mu} B^\mu = \frac{\partial x^{ik}}{\partial x^0} B^0 + \frac{\partial x^{ik}}{\partial x^i} B^i.$$

Учитывая, что $g^{00} = g^{00}(\partial x^{i0}/\partial x^0)^2$, убеждаемся в инвариантности $B^0/\sqrt{g^{00}}$. Очевидно, что B_k ковариантно относительно 3-мерных преобразований. Компоненты 1-й и 4-й строк не обладают свойством кинеметрической инвариантности.

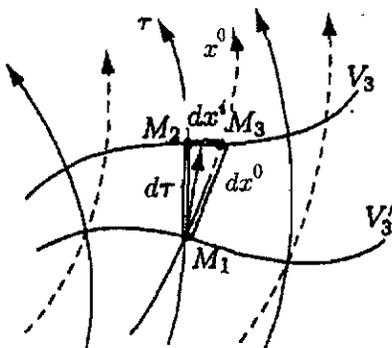


Рис. 4.4. Соотношение конгруэнций линий τ и x^0 в методе кинеметрических инвариантов

VII. Отметим также, что с одной и той же координатной системой можно связать несколько систем отсчета, в частности хронометрическую и кинеметрическую, причем в общем случае они будут отличаться друг от друга (см. рис. 4.4).

4.3.2. Физико-геометрические тензоры и операторы дифференцирования в кинеметрической калибровке

I. Используя значения составляющих метрического тензора в кинеметрической калибровке, из определений (4.1.13)–(4.1.15) находим выражения для физико-геометрических тензоров:

$${}^*a_i = \tau_0 \tau_{,i}^0; \quad {}^*\omega_{ik} \equiv 0; \quad (4.3.14)$$

$${}^*d_{ik} = \frac{1}{2} \left(\tau^\mu \frac{\partial h_{ik}}{\partial x^\mu} + h_{\alpha k} \frac{\partial \tau^\alpha}{\partial x^i} + h_{i\alpha} \frac{\partial \tau^\alpha}{\partial x^k} \right). \quad (4.3.15)$$

Здесь и в дальнейшем будем помечать пятиконечной звездочкой слева сверху величины и операторы в кинеметрической калибровке,

в отличие от шестиконечной звездочки, принятой в методе хронометрических инвариантов. Из (4.3.14) следует чрезвычайно важное свойство нормальных систем отсчета, — в них тождественно равно нулю тензор угловой скорости вращения системы отсчета. Это позволяет считать нормальные системы отсчета преимущественными (выделенными) в искривленном пространстве-времени, т. е. в некотором смысле назвать их *аналогом инерциальных систем отсчета в плоском пространстве-времени*.

II. В кинеметрической калибровке монадный оператор временного дифференцирования зависит от ранга и ковариантности дифференцируемых величин:

$${}^* \partial_T \tilde{B}_{k\dots}^{i\dots} = \sqrt{g^{00}} \frac{\partial \tilde{B}_{k\dots}^{i\dots}}{\partial x^0} + \frac{g^{0s}}{\sqrt{g^{00}}} \frac{\partial \tilde{B}_{k\dots}^{i\dots}}{\partial x^s} - N_s^i \tilde{B}_{k\dots}^{s\dots} - \dots + N_k^s \tilde{B}_s^{i\dots} + \dots, \quad (4.3.16)$$

где

$$N_s^i = -h_\sigma^i \tau_{,s}^\sigma = \tau_{,s}^i - \tau^{i*} a_s.$$

Вид ковариантной пространственной производной от пространственно-спроецированных тензоров полностью идентичен 3-мерной ковариантной производной от 3-мерного тензора:

$${}^* \tilde{\nabla}_l \tilde{B}_{k\dots}^{i\dots} = \frac{\partial \tilde{B}_{k\dots}^{i\dots}}{\partial x^l} + L_{sl}^i \tilde{B}_{k\dots}^{s\dots} + \dots - L_{kl}^i \tilde{B}_s^{i\dots} + \dots, \quad (4.3.17)$$

где

$$L_{kl}^s = \frac{h^{si}}{2} \left(\frac{\partial h_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial h_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial h_{kl}}{\partial x^i} \right) \quad (4.3.18)$$

— 3-мерные символы Кристоффеля.

Контрольные задания

1. Показать, что скорость движения кинеметрической системы отсчета относительно хронометрической, определенных в одной и той же координатной системе, имеет компоненты:

$$v^0 = \frac{g_{00} g^{00} - 1}{\sqrt{g_{00}}}; \quad v^k = \sqrt{g_{00}} g^{0k}. \quad (4.3.19)$$

2. Показать, что переход от одной кинеметрической системы отсчета к другой кинеметрической, движущейся со скоростью v_k относительно первой, описывается преобразованием координат:

$$\frac{\partial x^0}{\partial x^k} = \frac{v_k \sqrt{g^{00}}}{1 - (g^{0j}/\sqrt{g^{00}})v_j} \frac{\partial x^0}{\partial x^0}; \quad \text{или, обратным} \quad (4.3.20)$$

$$\frac{\partial x^0}{\partial x^{ik}} = -\frac{v_i \sqrt{g^{00}}}{1 - (g^{0j}/\sqrt{g^{00}})v_j} \frac{\partial x^i}{\partial x^{ik}}.$$

Замечание. Эта задача подробно рассмотрена в [1, с. 71–75].

§ 4.4. Монадный вид ключевых уравнений

Все введенные в предыдущих параграфах общековариантные выражения можно представить в монадном виде, т. е. записать их исключительно через пространственно-спроецированные тензоры (и скаляры), физико-геометрические тензоры и операторы монадного дифференцирования, причем это всегда можно сделать как в общековариантном виде, так и в специальных групповых калибровках. Отдельно рассмотрим важнейшие из введенных выше уравнений.

4.4.1. Уравнения геодезических линий

1. Для записи уравнений геодезических линий, прежде всего, учтем вид символов Кристоффеля через монадные величины (4.1.26). Кроме того, введем ряд 3-мерных обозначений:

$$v^\mu \equiv \frac{-h_\nu^\mu dx^\nu}{\tau_\alpha dx^\alpha} = -h_\nu^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (4.4.1)$$

— пространственные компоненты скорости частицы;

$$ds = d\tau \sqrt{1 - v^2}; \quad m \equiv m_0 \frac{\tau_\alpha dx^\alpha}{ds} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (4.4.2)$$

— динамическая масса частицы (m_0 — масса покоя);

$$p^\mu = -m_0 h_\alpha^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} = m v^\mu. \quad (4.4.3)$$

— компоненты 3-импульса.

После несложных выкладок получаем выражение для 4-мерной скорости через 3-мерные скорости:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} = \frac{\tau^\mu + v^\mu}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (4.4.4)$$

II. Уравнения геодезических линий в монадном виде представляются следующим образом:

$$\frac{Dm}{d\tau} \equiv (\partial_T m + v^\mu \tilde{\nabla}_\mu m) = a_\mu p^\mu - d_{\mu\nu} p^\mu v^\nu; \quad (4.4.5)$$

$$\frac{Dp^\nu}{d\tau} \equiv (\partial_T p^\nu + v^\mu \tilde{\nabla}_\mu p^\nu) = -m a^\nu - 2p^\mu (\omega_{\mu}^{\nu} - d_{\mu}^{\nu}). \quad (4.4.6)$$

В левых частях этих уравнений стоит оператор, имеющий смысл субстанциальной временной производной в механике сплошных сред.

Первое из этих выражений описывает изменение кинетической энергии (mc^2) тела в неинерциальной системе отсчета. Как видно из (4.4.5), оно определяется ускорением системы отсчета a_μ и тензором скоростей деформаций $d_{\mu\nu}$.

Второе уравнение описывает изменение 3-мерного импульса в неинерциальной системе отсчета. Сравним это выражение с уравнением движения материальной точки в неинерциальной системе отсчета в ньютоновой механике

$$\frac{d\vec{p}_{\text{отн}}}{dt} = \vec{F} - m\vec{a}_{\text{пер}} - m\vec{a}_{\text{кор}}, \quad (4.4.7)$$

где, напомним, кориолисово ускорение $\vec{a}_{\text{кор}} = 2[\vec{\omega}\vec{v}_{\text{отн}}]$ (или в 3-мерных тензорных обозначениях $a_{\text{кор}}^i = 2\omega_{j}^i v^j$), определяется через угловую скорость вращения классической системы отсчета $\vec{\omega}$ и относительной скоростью материальной точки $\vec{v}_{\text{отн}}$. В формуле (4.4.7) также содержится переносная сила инерции и реальная сила \vec{F} , действующая на точку. Понятно, что в уравнениях геодезической отсутствуют реальные силы. Из сравнения правых частей (4.4.6) и (4.4.7) находим подтверждение ранее произведенной интерпретации физико-геометрических тензоров: a^ν — ускорение; ω_{μ}^{ν} — тензор угловой скорости вращения системы отсчета. Третий тензор — скоростей деформаций $d_{\mu\nu}$, входящий в (4.4.6), в известных

уравнениях ньютоновой механики отсутствует, поскольку там используется твердотельное определение классических систем отсчета, невозможное в общей теории относительности.

III. Чтобы записать уравнения изотропных геодезических линий (1.3.27), введем проекции волнового вектора: $\varepsilon = k^\mu \tau_\mu$ — энергия изотропного излучения; $\tilde{k}^\nu = -k^\mu h_\mu^\nu$ — пространственно-подобная часть (импульс) волнового вектора; $l^\nu = \tilde{k}^\nu / \varepsilon$ — направление распространения изотропного излучения ($l^\mu \tau_\mu = 0$). Используя эти обозначения, находим, что две проекции уравнения (1.3.27) записываются следующим образом:

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\tau} = \frac{\partial_T \varepsilon + l^\mu \tilde{\nabla}_\mu \varepsilon}{\varepsilon} = a_\mu l^\mu - d_{\mu\nu} l^\mu l^\nu; \quad (4.4.8)$$

$$\frac{d\tilde{k}^\nu}{d\tau} = \partial_T \tilde{k}^\nu + l^\mu \tilde{\nabla}_\mu \tilde{k}^\nu = -\varepsilon a^\nu - 2(\omega_\mu^\nu - d_{\nu\mu}) \tilde{k}^\mu. \quad (4.4.9)$$

4.4.2. Уравнения Эйнштейна и тождества

I. Прежде всего, запишем проекции компонент тензора Риччи на направления τ и пространственное сечение:

$${}^4R_{\mu\nu} \tau^\mu \tau^\nu = (\partial_T d - d_{\alpha\beta} d^{\alpha\beta}) + \omega_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta} + (\tilde{\nabla}_\lambda a^\lambda - a_\lambda a^\lambda); \quad (4.4.10)$$

$$-{}^4R_{\mu\nu} h_\alpha^\mu h_\alpha^\nu \tau^\mu = \tilde{\nabla}_\alpha d - \tilde{\nabla}_\lambda (\omega_\alpha^\lambda + d_\alpha^\lambda) - 2a_\lambda \omega_\alpha^\lambda; \quad (4.4.11)$$

$${}^4R_{\mu\nu} h_\alpha^\mu h_\beta^\nu = -(\partial_T - d) d_{\alpha\beta} + \frac{\tilde{\nabla}_\alpha a_\beta + \tilde{\nabla}_\beta a_\alpha - 2a_\alpha a_\beta}{2} + \\ + (d_{\alpha\lambda} + \omega_{\alpha\lambda})(d_\beta^\lambda + \omega_\beta^\lambda) + (d_{\alpha\lambda} d_\beta^\lambda - 3\omega_{\alpha\lambda} \omega_\beta^\lambda) + {}^3\tilde{R}_{\alpha\beta}, \quad (4.4.12)$$

где ${}^3R_{\alpha\beta} = {}^3R_{\alpha\lambda\beta}^\lambda$ — 3-мерный тензор Риччи; $d = -d_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta}$.

Из этих выражений скалярная кривизна в монодном виде записывается следующим образом:

$${}^4R = 2\partial_T d - (d^2 + d_{\alpha\beta} d^{\alpha\beta}) - \omega_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta} + 2(\tilde{\nabla}_\lambda a^\lambda - a_\lambda a^\lambda) + {}^3R, \quad (4.4.13)$$

где ${}^3R = -h^{\alpha\beta} {}^3R_{\alpha\beta}$. Напомним, что во всех формулах индексы поднимаются и опускаются посредством $g^{\mu\nu}$ (или, что равносильно для пространственно-спроецированных величин, посредством $-h^{\mu\nu}$).

II. Проекции уравнений Эйнштейна на монадные составляющие метрического тензора находятся в виде:

$$\left({}^4R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} {}^4R \right) \tau^\mu \tau^\nu = \frac{d^2 - d_{\alpha\beta} d^{\alpha\beta}}{2} + \frac{3\omega_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}}{2} - \frac{{}^3R}{2} = \varkappa T_{\mu\nu} \tau^\mu \tau^\nu; \quad (4.4.14)$$

$$\begin{aligned} - \left({}^4R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} {}^4R \right) \tau^\mu h_\alpha^\nu &= \tilde{\nabla}_\alpha d - \tilde{\nabla}_\lambda (\omega_\alpha^\lambda + d_\alpha^\lambda) - \\ &- 2a_\lambda \omega^\lambda{}_\alpha = -\varkappa T_{\mu\nu} \tau^\mu h_\alpha^\nu; \end{aligned} \quad (4.4.15)$$

$$\begin{aligned} \left({}^4R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} {}^4R \right) h_\alpha^\mu h_\beta^\nu &= (\partial_T - d) d_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \partial_T d + \\ &+ (d_{\alpha\lambda} + \omega_{\alpha\lambda})(d_\beta^\lambda + \omega_\beta^\lambda) + (d_{\alpha\lambda} d_\beta^\lambda - 3\omega_{\alpha\lambda} \omega_\beta^\lambda) - \\ &- \frac{h_{\alpha\beta} (d^2 + d_{\mu\nu} d^{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu})}{2} + \frac{\tilde{\nabla}_\alpha a_\beta + \tilde{\nabla}_\beta a_\alpha - 2a_\alpha a_\beta}{2} + \\ &+ h_{\alpha\beta} (\tilde{\nabla}_\lambda a^\lambda - a_\lambda a^\lambda) + \left({}^3R_{\alpha\beta} + \frac{h_{\alpha\beta} {}^3R}{2} \right) = \varkappa T_{\mu\nu} h_\alpha^\mu h_\beta^\nu. \end{aligned} \quad (4.4.16)$$

Скалярная часть спроецированных уравнений Эйнштейна (4.4.15) допускает простую физическую интерпретацию. Так как справа стоит плотность энергии системы в физических терминах $T_{\mu\nu} \tau^\mu \tau^\nu$, то левую часть следует понимать как представление физической плотности энергии через геометрические понятия. Поскольку $d_{\mu\nu}$ есть временная производная от 3-мерного метрического тензора, то слагаемые, содержащие квадратично $d_{\mu\nu}$, естественно интерпретировать как геометрическую кинетическую энергию системы. Слагаемые с квадратичной комбинацией тензора угловой скорости вращения $\omega_{\mu\nu}$ следует трактовать как энергию системы, обусловленную вращением, а оставшееся слагаемое, пропорциональное скалярной трехмерной кривизне, не содержащее временных производных, тогда следует понимать как геометрическую потенциальную энергию системы.

III. Из тензора Римана—Кристоффеля ${}^4R_{\beta\mu\nu}^\alpha$ всеми возможными способами проецирования можно получить три пространственно-

спроецированных тензора:

$$Z_{\delta\gamma\sigma}^{\lambda} \equiv H_{\alpha\delta\gamma\sigma}^{\lambda\beta\mu\nu} R_{\beta\mu}^{\alpha} = {}^3\tilde{R}_{\delta\gamma\sigma}^{\lambda} - 2\omega_{\delta}^{\lambda}\omega_{\gamma\sigma} + (d_{\sigma}^{\lambda} + \omega_{\sigma}^{\lambda})(d_{\gamma\delta} + \omega_{\gamma\delta}) - (d_{\gamma}^{\lambda} + \omega_{\gamma}^{\lambda})(d_{\sigma\delta} + \omega_{\sigma\delta}); \quad (4.4.17)$$

$$Y_{\delta\gamma\sigma} \equiv {}^4R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} \tau_{\alpha} h_{\delta}^{\beta} h_{\gamma}^{\mu} h_{\sigma}^{\nu} = -2a_{\delta}\omega_{\gamma\sigma} + \tilde{\nabla}_{\sigma}(d_{\gamma\delta} + \omega_{\gamma\delta}) - \tilde{\nabla}_{\gamma}(d_{\sigma\delta} + \omega_{\sigma\delta}); \quad (4.4.18)$$

$$X_{\sigma\gamma} \equiv {}^4R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} \tau_{\alpha} \tau^{\mu} h_{\sigma}^{\beta} h_{\gamma}^{\nu} = \partial_T d_{\sigma\gamma} + (d_{\sigma}^{\lambda} + \omega_{\sigma}^{\lambda})(d_{\gamma\lambda} + \omega_{\gamma\lambda}) + \frac{\tilde{\nabla}_{\sigma} a_{\gamma} + \tilde{\nabla}_{\gamma} a_{\sigma} - 2a_{\sigma} a_{\gamma}}{2}. \quad (4.4.19)$$

IV. Используя предыдущие формулы, запишем тождества Риччи:

$$\partial_T \omega_{\mu\nu} = -\frac{\tilde{\nabla}_{\mu} a_{\nu} - \tilde{\nabla}_{\nu} a_{\mu}}{2}; \quad (4.4.20)$$

$$(\tilde{\nabla}_{\nu} + a_{\nu})\omega_{\mu\beta} + (\tilde{\nabla}_{\beta} + a_{\beta})\omega_{\nu\mu} + (\tilde{\nabla}_{\mu} + a_{\mu})\omega_{\beta\nu} = 0; \quad (4.4.21)$$

$$Z_{\mu\nu\sigma\lambda} + Z_{\mu\lambda\nu\sigma} + Z_{\mu\sigma\lambda\nu} = 0. \quad (4.4.22)$$

Тождества Бианки в монодном виде выглядят громоздко.

V. Все выписанные выше соотношения в общековариантном виде легко записать в *хронометрической калибровке*. Для этого достаточно везде 'заменить 4-мерные (греческие) индексы на 3-мерные (латинские), а в обозначениях физико-геометрических тензоров и монодных операторов слева сверху поставить звездочку, означающую, что эти величины взяты в хронометрической калибровке.

VI. В *кинеметрической калибровке* все формулы упрощаются, поскольку в ней тензор угловой скорости вращения обращается в нуль. Кроме того, необходимо сделать переобозначения, как и в случае перехода к хронометрической калибровке.

Отметим, что в кинеметрической калибровке, поскольку 3-мерная связность переходит в 3-мерные символы Кристоффеля, 3-мерный тензор Риччи записывается в общепринятом виде

$${}^3R_{ik} = \frac{\partial L_{ik}^l}{\partial x^l} - \frac{\partial L_{il}^l}{\partial x^k} + L_{ik}^l L_{ls}^s - L_{il}^s L_{ks}^l. \quad (4.4.23)$$

Метод кинеметрических инвариантов можно понимать как способ выделения в 4-мерном римановом пространстве-времени 3-мерных пространственно-подобных гиперповерхностей.

4.4.3. Уравнения Максвелла в монадном виде

Материал данного раздела важен не только в связи с обсуждением теории гравитации — он существен для решения большого круга практических задач, в которых рассматриваются явления электродинамики в неинерциальных системах отсчета как в искривленном, так и в плоском пространстве-времени. Выписанные ниже уравнения справедливы и в отсутствие гравитации.

I. Векторный потенциал электромагнитного поля A_μ в монадном виде представляется следующим образом: $A_\mu = \tau_\mu A + \tilde{A}_\mu$, где введены скалярный (A) и пространственно-спроецированные (\tilde{A}_μ) компоненты потенциала:

$$A = A_\mu \tau^\mu; \quad \tilde{A}_\mu = -h_\mu^\nu A_\nu. \quad (4.4.24)$$

II. Тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ записывается через введенные величины в виде:

$$F_{\mu\nu} = \left(\frac{\partial \tilde{A}_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \tilde{A}_\mu}{\partial x^\nu} \right) + \left(\tau_\nu \frac{\partial A}{\partial x^\mu} - \tau_\mu \frac{\partial A}{\partial x^\nu} \right) + A(2\omega_{\nu\mu} + a_\nu \tau_\mu - a_\mu \tau_\nu). \quad (4.4.25)$$

Из этого выражения можно построить пространственно-спроецированный вектор напряженности электрического поля и тензор напряженности магнитного поля:

$$E_\nu = -\tau^\alpha h_\nu^\beta F_{\alpha\beta} = \partial_T \tilde{A}_\nu - (\tilde{\nabla}_\nu - a_\nu)A; \quad (4.4.26)$$

$$H_{\mu\nu} = h_\mu^\alpha h_\nu^\beta F_{\alpha\beta} = (\tilde{\nabla}_\mu \tilde{A}_\nu - \tilde{\nabla}_\nu \tilde{A}_\mu) + 2A\omega_{\nu\mu}, \quad (4.4.27)$$

причем имеет место соотношение

$$F_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} + \tau_\mu E_\nu - \tau_\nu E_\mu. \quad (4.4.28)$$

Характерно, что в определении пространственно-спроецированных компонент напряженностей входят физико-геометрические тензоры ускорения a_μ и вращения $\omega_{\mu\nu}$ неинерциальной системы отсчета.

Здесь использована тензорная запись напряженности магнитного поля. В групповых калибровках от нее можно перейти к более привычной в практических задачах векторной записи. Например, в хронометрической калибровке имеем

$$H^i = \varepsilon^{ikj} H_{kj}, \quad (4.4.29)$$

где ε^{ikj} — 3-мерный символ Леви-Чивиты.

III. Первую пару уравнений Максвелла (1.5.15) в монадном виде можно представить в форме

$$\partial_T H_{\mu\nu} = (\tilde{\nabla}_\mu - a_\mu) E_\nu - (\tilde{\nabla}_\nu - a_\nu) E_\mu; \quad (4.4.30)$$

$$\tilde{\nabla}_\mu H_{\nu\sigma} + \tilde{\nabla}_\nu H_{\sigma\mu} + \tilde{\nabla}_\sigma H_{\mu\nu} = 2(E_\mu \omega_{\nu\sigma} + E_\nu \omega_{\sigma\mu} + E_\sigma \omega_{\mu\nu}). \quad (4.4.31)$$

Подчеркнем, что в эти выражения входят характеристики неинерциальной системы отсчета.

IV. Вторую пару уравнений Максвелла (1.5.16) можно представить в виде:

$$\tilde{\nabla}_\mu E^\mu - H^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J; \quad (4.4.32)$$

$$(\partial_T - d) E^\mu + (\tilde{\nabla}_\nu - a_\nu) H^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} \tilde{J}^\mu, \quad (4.4.33)$$

где использованы обозначения для плотности заряда и вектора тока:

$$J = \tau_\nu j^\nu, \quad \tilde{J}^\mu = -\hbar^\mu j^\nu.$$

Легко видеть сходство уравнений Максвелла в монадном виде с общепринятой 3-мерной записью этих уравнений, однако в данном случае эти уравнения записаны не в инерциальных, а в произвольных системах отсчета, причем не только в принятых в ньютоновой теории «твердотельных» системах отсчета, но и деформируемых.

V. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля (1.5.17) имеет следующие проекции:

$$T^{\mu\nu} \tau_\mu \tau_\nu = -\frac{1}{8\pi} \left(E_\lambda E^\lambda - \frac{H_{\alpha\beta} H^{\alpha\beta}}{2} \right); \quad (4.4.34)$$

$$-T^{\mu\nu} \hbar_{\mu}^{\alpha} \tau_{\nu} = -\frac{1}{4\pi} H^{\alpha\beta} E_{\beta}; \quad (4.4.35)$$

$$T^{\mu\nu} \hbar_{\mu}^{\alpha} \hbar_{\nu}^{\beta} = -\frac{1}{4\pi} \left[E^{\alpha} E^{\beta} + H_{\sigma}^{\alpha} H^{\beta\sigma} + \frac{\hbar^{\alpha\beta} (2E_{\lambda} E^{\lambda} + H_{\lambda\sigma} H^{\lambda\sigma})}{4} \right]. \quad (4.4.36)$$

VI. Заметим, что первая пара уравнений Максвелла (4.4.31)–(4.4.32) очень похожа на монадные тождества (4.4.21) и (4.4.22), если соотнести друг с другом величины:

$$\omega_{\mu\nu} \rightarrow C_0 H_{\mu\nu}; \quad a_{\mu} \rightarrow -2C_0 E_{\mu}, \quad (4.4.37)$$

где C_0 — некая размерная константа, которая будет определена ниже.

Контрольные задания

1. Показать, что уравнение Клейна—Фока (1) в монадном виде записывается следующим образом

$$(\partial_T - d)\mathcal{E} + (\tilde{\nabla}_{\mu} - a_{\mu})p^{\mu} + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \Psi = 0, \quad (4.4.38)$$

где

$$\mathcal{E} = \tau^{\nu} \frac{\partial \Psi}{\partial x^{\nu}}; \quad p_{\mu} = -\hbar_{\mu}^{\nu} \frac{\partial \Psi}{\partial x^{\nu}}.$$

2. Записать в монадном виде выражение для закона сохранения заряда $\nabla_{\mu} j^{\mu} = 0$, где j^{μ} — вектор 4-тока.
3. Записать в монадном виде выражение для «закона сохранения» энергии-импульса в ОТО $\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0$, где $T^{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса материи.

§ 4.5. Монадный метод в точных решениях уравнений Эйнштейна

Применим монадный метод для интерпретации эффектов в рассмотренных выше точных решениях уравнений Эйнштейна. Отметим, что три физически наиболее важных решения уравнений Эйнштейна: Шварцшильда, Керра и Фридмана — оказались тесно связанными с проявлениями трех ключевых характеристик используемых систем отсчета, соответственно, вектора ускорения a_k , тензора угловой скорости вращения ω_{ik} и тензора скоростей деформаций d_{ik} .

4.5.1. Монадный метод в метриках Фридмана

I. Начнем с рассмотрения метрик Фридмана, где, строго говоря, уже при постановке задачи их нахождения оказалось необходимым понятие системы отсчета. Действительно, постулируемые свойства однородности и изотропии (одинаковости по всем направлениям) пространства неявно предполагают глобальное расщепление 4-мерного пространственно-временного многообразия на направление времени и ортогональное ему пространственное сечение, о свойствах которого идет речь. Исходя из изложенного выше, делаем вывод, что метрики Фридмана рассматриваются в нормальных системах отсчета, для описания которых следует использовать метод кинематических инвариантов. Монадные составляющие метрического тензора находятся в виде

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \frac{1}{\tau^0} = a(x^0); & h_{11} &= \frac{1}{h^{11}} = a^2(x^0); \\ h_{22} &= \frac{1}{h^{22}} = a^2 b^2; & h_{33} &= \frac{1}{h^{33}} = a^2 b^2 \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

II. Как известно, в нормальных системах отсчета тензор угловой скорости вращения тождественно равен нулю. Условия однородности и изотропии пространственных сечений означают отсутствие выделенных направлений, что приводит к обращению в нуль вектора ускорения системы отсчета. Таким образом, метрики Фридмана описываются лишь тензором скоростей деформаций системы отсчета, компоненты которого и монадные производные от них сразу же легко находятся из вида метрики (3.1.1):

$$d_{ik} = \frac{1}{2} \tau^0 h_{ik,0} = \frac{\dot{a}}{a^2} h_{ik}; \quad d = -\frac{3\dot{a}}{a^2}; \quad (4.5.2)$$

$$\tilde{\nabla}_k d_{ij} = 0; \quad \partial_T d_{ik} = \frac{\ddot{a}}{a^3} h_{ik}; \quad \partial_T d = -\frac{3}{a^4} (\ddot{a} - 2\dot{a}^2). \quad (4.5.3)$$

III. Уравнения Эйнштейна для данных метрик существенно упрощаются:

$$\partial_T d - d_{ik} d^{ik} = \varkappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \tau^\mu \tau^\nu - \Lambda; \quad (4.5.4)$$

$$-(\partial_T - d)d_{ik} + 2d_i^l d_{kl} + {}^3R_{ik} = \varkappa \left(T_{ik} + \frac{h_{ik} T}{2} \right) + h_{ik} \Lambda. \quad (4.5.5)$$

Подставляя в уравнения (4.5.5) значения из (4.5.2)–(4.5.3), сразу же находим важное свойство однородных и изотропных моделей (3.1.15), т. е. формулу, выражающую тензор Риччи пространственных сечений через компоненты их метрики.

IV. В связи с наличием правой части выписанных уравнений Эйнштейна обратим внимание на определение монадным методом энергии (и импульса) материальных систем. Без использования монадного метода возникает неоднозначность, в частности, в определении плотности энергии материальных систем. Принято считать плотностью энергии времени-подобные компоненты тензора энергии-импульса, однако таковых несколько: T_{00} , T^{00} , T_0^0 . Какую из них считать плотностью энергии? В общем случае эти компоненты различны. Даже выбрав одну из них, проблему решить не удастся, так как возникает следующий вопрос, в какой координатной системе следует писать эту компоненту? Монадный метод позволяет однозначно решить этот вопрос. Плотностью энергии следует считать инвариантную величину $T^{\mu\nu}\tau_\mu\tau_\nu$, которую в нормальных системах отсчета следует писать в виде

$$\rho c^2 = T^{00}\tau_0\tau_0 = \frac{T^{00}}{g^{00}}. \quad (4.5.6)$$

При использовании метода хронометрических инвариантов плотность энергии должна записываться несколько иначе: T_{00}/g_{00} .

V. В решениях Фридмана используется нормальная система отсчета, сопутствующая среднему распределению материи во Вселенной, т. е. в данном случае система отсчета реализуется не идеальными приборами, не влияющими на вид метрики, а материализована средой, заполняющей мир и определяющей метрику. Как уже отмечалось, это означает «вмороженность» среды в пространство. Постулируется, что пекулярными движениями материи можно пренебречь, и вся динамика материи описывается эволюцией пространственных сечений, т. е. тензором скоростей деформаций d_{ik} . При этом, переходя от (3.1.12) к проекции уравнения Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}$$

на монаду, приходим к соотношению (без космологического члена)

$$\frac{d^2 - d_{ik}d^{ik}}{2\alpha} - \frac{{}^3R}{2\alpha} = T^{\mu\nu}\tau_\mu\tau_\nu, \quad (4.5.7)$$

которое можно трактовать как перезапись плотности физической энергии (справа) через геометрические термины (слева). Как уже отмечалось, первое слагаемое слева нужно трактовать как плотность кинетической энергии, а второе слагаемое (с 3-мерной скалярной кривизной) — как плотность потенциальной энергии материи.

VI. В предыдущей главе при интерпретации эволюции трех космологических моделей фактически уже были использованы представления о физическом времени в формулах

$$d\tau = a(x^0) dx^0.$$

Без монодного метода возникает соблазн использовать в качестве физического времени либо времени-подобную координату x^0 , либо какую-то другую функцию от x^0 .

VII. Космологическое красное смещение можно получить из скалярной компоненты уравнений изотропной геодезической (3.3.4), которая в метриках Фридмана в сопутствующей системе отсчета принимает вид

$$\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon}{d\tau} = -d_{ik}l^i l^k. \quad (4.5.8)$$

При учете значений компонент тензора скоростей деформаций (4.5.2) и условия $h_{ik}l^i l^k = 1$ это уравнение принимает вид

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = -\frac{\dot{a}}{a} dx^0, \quad (4.5.9)$$

Решением которого является

$$\varepsilon = \frac{C_0}{a(x^0)}. \quad (4.5.10)$$

Это выражение соответствует решению (3.3.8). Дальнейшие рассуждения, совпадающие с изложенными в главе 3, приводят к ранее приведенной формуле (3.3.11) для космологического красного смещения.

4.5.2. Монадный метод в метрике Шварцшильда

I. Поскольку метрика Шварцшильда рассматривалась в диагональном виде (2.1.28), то оказывается безразличным, какой метод (хронометрических или кинеметрических инвариантов) использовать для анализа этой метрики в системе отсчета, непосредственно вводимой описанными выше способами. Выберем метод хронометрических инвариантов, тогда имеем монадные составляющие метрического тензора

$$\tau_0 = \frac{1}{r^0} = e^{v/2} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}; \quad h_{11} = \frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}; \quad (4.5.11)$$

$$h_{22} = r^2; \quad h_{33} = r^2 \sin^2 \theta.$$

II. В хронометрически определенной из метрики Шварцшильда в координатах кривизн (2.1.28) системе отсчета из трех физико-геометрических тензоров отличным от нуля является лишь вектор ускорения, имеющий компоненты:

$$a_1 = -\frac{GM}{c^2 r^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} \simeq -\frac{GM}{c^2 r^2} = -\frac{g}{c^2}; \quad a_2 = a_3 = 0, \quad (4.5.12)$$

где $g = GM/r^2$ — ускорение свободного падения в ньютоновой теории гравитации. Таким образом, хронометрически определенная в координатах кривизн система отсчета характеризуется радиальным значением вектора ускорения, равного (с точностью до константы c^2) ускорению свободного падения. Она описывает явления с точки зрения зависшей (неподвижной) системы отсчета. Напомним, что вектор $a_\mu \neq 0$ означает, что система отсчета не является геодезической. Для нас, находящихся на поверхности Земли, негеодезичность нашей системы отсчета обеспечивается негравитационными силами реакции опоры. В этой интерпретации проявляется принцип эквивалентности тяготения и эффекта неинерциальности системы отсчета.

III. Ранее отмечалось, что при использовании монадного метода наблюдаемыми величинами следует считать скаляры, тогда как выражение (4.5.12) таковым не является, однако это легко исправить,

сопоставив радиальной компоненте ускорения скаляр

$$a_i a_k h^{ik} = (a_1)^2 h^{11} = \frac{G^2 M^2}{c^4 r^4 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} \equiv a^2(1). \quad (4.5.13)$$

Заметим, что этот скаляр обращается в бесконечность на гравитационном радиусе источника искривления.

Раскладывая в ряд получившуюся наблюдаемую величину, имеем

$$c^2 a(1) \simeq -\frac{GM}{r^2} - \frac{G^2 M^2}{c^2 r^3}, \quad (4.5.14)$$

т. е. к ньютоновому ускорению свободного падения g добавляется эйнштейновское ускорение, обратно пропорциональное третьей степени расстояния. Отметим расхождение с выражением для полученной в «координатном представлении» эйнштейновской «силы», убывающей обратно пропорционально четвертой степени расстояния (радиальной координаты). Это расхождение связано именно с координатным характером ускорения в (2.2.22), которое необходимо пересчитать на инвариантное выражение согласно (4.5.14).

IV. Монадный метод предназначен не для получения точных решений уравнений Эйнштейна, а лишь для интерпретации метрик и эффектов в них. Тем не менее выпишем в монадном виде уравнения Эйнштейна для данной метрики:

$$\tilde{\nabla}_k a^k - a_k a^k = 0; \quad (4.5.15)$$

$$\frac{\tilde{\nabla}_i a_k + \tilde{\nabla}_k a_i}{2} - a_i a_k + {}^3R_{ik} = 0. \quad (4.5.16)$$

Отсюда сразу следует, что ${}^3R = 0$. Легко показать, что, не зная вида функции $h_{11}(r)$, из равенства нулю 3-мерной скалярной кривизны с помощью стандартных формул можно получить уравнение

$$r h'_{11} + h_{11}^2 - h_{11} = 0, \quad (4.5.17)$$

где штрих означает дифференцирование по r . Из (4.5.17) получается решение

$$h_{11} = \left(1 - \frac{C_0}{r}\right)^{-1}, \quad (4.5.18)$$

определяющее метрику Шварцшильда.

V. Скалярная компонента уравнения изотропной геодезической (4.4.8) в метрике Шварцшильда имеет вид

$$\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon}{d\tau} = a_1 l^1 = a(1) = \frac{GM}{c^2 r^2 \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}}. \quad (4.5.19)$$

Учитывая, что для изотропной радиальной геодезической

$$d\tau = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}},$$

находим для этого случая решение

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}}, \quad (4.5.20)$$

где ε_0 — константа интегрирования.

VI. Применим полученное решение для объяснения эффекта гравитационного красного смещения в метрике Шварцшильда. Пусть положение источника света характеризуется координатой r_1 , а приемник находится в точке с координатой $r_2 > r_1$ при тех же значениях угловых координат, тогда, согласно (4.5.20), имеем

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r_1}}} > \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r_2}}}, \quad (4.5.21)$$

т. е. свет, приходящий в более удаленные точки, будет иметь меньшую энергию и, соответственно, частоту. Другими словами, спектр приходящего излучения будет сдвинут в красную сторону по сравнению со спектром аналогичного излучения, испущенного в точке наблюдения. Относительная разность частот определяется формулой

$$\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} = \frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_1} \simeq - \frac{GM(r_2 - r_1)}{c^2 r_1 r_2}. \quad (4.5.22)$$

В теории тяготения Ньютона красное смещение спектра в рассматриваемом приближении определяется той же величиной. Этот

эффект можно трактовать как потерю энергии светом при преодолении ньютонова гравитационного притяжения, т. е.

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = -mg\Delta h \simeq -\frac{\varepsilon_1 GM}{c^2} \frac{(r_2 - r_1)}{r^2} \quad (4.5.23)$$

для не слишком большого перепада высот, когда $r \sim r_1 \sim r_2$. Здесь введена эффективная масса фотона, согласно формулам

$$\varepsilon_1 = mc^2 = h\nu.$$

Гравитационное красное смещение имеет место и в тех случаях, когда свет приходит на Землю от звезды, на поверхности которой

$$\frac{M_{\text{звезды}}}{R_{\text{звезды}}} > \frac{M_{\text{Земли}}}{R_{\text{Земли}}}. \quad (4.5.24)$$

4.5.3. Монодный метод в метрике Керра

Для метрики Керра, записанной в одной и той же координатной системе Бойера—Линдквиста, можно определить хронометрическим и кинеметрическим способом две различные системы отсчета. Рассмотрим их отдельно.

1. В хронометрическом способе определенной системе отсчета составляющие метрического тензора имеют вид:

$$\tau^\mu = \frac{g_0^\mu}{\sqrt{1 - \frac{r_g r}{\rho^2}}}; \quad \tau_\mu = \left\{ \sqrt{1 - \frac{r_g r}{\rho^2}}; 0; 0; \frac{r_g r a \sin^2 \theta}{\rho^2 \sqrt{1 - \frac{r_g r}{\rho^2}}} \right\};$$

$$h_{ik} = \begin{pmatrix} \frac{\rho^2}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho^2 \Delta_1 \sin^2 \theta}{\rho^2 - r_g r} \end{pmatrix}; \quad h^{ik} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_1}{\rho^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho^2 - r_g r}{\rho^2 \Delta_1 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}, \quad (4.5.25)$$

где использованы обозначения:

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta; \quad \Delta_1 = r^2 + a^2 - r_g r.$$

По формулам (4.2.12) находим компоненты вектора ускорения

$$a_1 = \frac{r_g(\rho^2 - 2r^2)}{2\rho^2(\rho^2 - r_g r)}; \quad a_2 = \frac{r_g(\rho^2 - 2r^2) \sin 2\theta}{2\rho^2(\rho^2 - r_g r)}; \quad a_3 = 0, \quad (4.5.26)$$

и компоненты тензора угловой скорости вращения системы отсчета:

$$\begin{aligned} \omega_{12} &= 0; \quad \omega_{13} = -\frac{r_g a(\rho^2 - 2r^2) \sin^2 \theta}{2\rho(\rho^2 - r_g r)^{3/2}}; \\ \omega_{23} &= -\frac{r_g r a \Delta_1 \sin 2\theta}{2\rho(\rho^2 - r_g r)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (4.5.27)$$

Тензор скоростей деформаций тождественно равен нулю $d_{ik} = 0$.

II. В кинематическом способе определенной системе отсчета находим следующие значения составляющих метрического тензора:

$$\begin{aligned} \tau_\mu &= \frac{g_\mu^0 \sqrt{\rho^2 \Delta_1}}{\sqrt{\Delta_2}}; \quad \tau^\mu = \left\{ \frac{\sqrt{\Delta_2}}{\sqrt{\rho^2 \Delta_1}}; 0; 0; \frac{r_g r a}{\sqrt{\rho^2 \Delta_1 \Delta_2}} \right\}; \\ h_{ik} &= \begin{pmatrix} \rho^2/\Delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta_2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.5.28)$$

где

$$\Delta_2 = \rho^2(r^2 + a^2) + r_g r a^2 \sin^2 \theta.$$

Отсюда получаем значения физико-геометрических тензоров:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{r_g}{2\rho^2 \Delta_1 \Delta_2} [(r^2 + a^2)^2 (a^2 \cos^2 \theta - r^2) + 2r^3 r_g a^2 \sin^2 \theta]; \\ a_2 &= \frac{a^2 \sin 2\theta r_g r (r^2 + a^2)}{2\rho^2 \Delta_2}; \quad a_3 = 0. \end{aligned} \quad (4.5.29)$$

$$d_{13} = -r_g a [2r^2(r^2 + a^2) + \rho^2(r^2 - a^2)] \frac{\sin^2 \theta}{2\rho^2 \sqrt{\rho^2 \Delta_1 \Delta_2}};$$

$$d_{23} = \frac{r_g r a^3 \sin^3 \theta \cos \theta \sqrt{\Delta_1}}{\rho^2 \sqrt{\rho^2 \Delta_2}}; \quad d_{11} = d_{12} = d_{22} = d_{33} = 0. \quad (4.5.30)$$

Тензор угловой скорости вращения, очевидно, равен нулю. Легко видеть, что эти значения физико-геометрических тензоров существенно отличается от аналогичных выражений в хронометрической калибровке.

Контрольные задания

1. Показать, что преобразованием координат вида (4.2.7) метрику Шварцшильда в координатах кривизн можно привести к виду

$$ds^2 = (dx^0)^2 - \frac{dr^2}{\left[\frac{3}{2}r_g(r-x^0)\right]^{3/2}} - \left(\frac{3(r-x^0)}{2}\right)^{4/3} r_g^{2/3} (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (4.5.31)$$

В системе отсчета, хронометрическим образом полученной из данной метрики, найти физико-геометрические тензоры.

2. В свободно падающей системе отсчета, хронометрическим образом полученной из метрики Шварцшильда (4.5.31), найти время достижения пробным телом гравитационного радиуса (радиального падения из некоего начального положения $r_1 > r_g$).
3. В метрике Керра построить из физико-геометрических тензоров инварианты $a_k a^k$, $d = -d_{ik} h^{ik}$ и $\omega^2 = \omega_{ik} \omega^{ik}$ в хронометрической и кинеметрической системах отсчета и сравнить их друг с другом.
4. Найти физико-геометрические тензоры в однородной анизотропной космологической модели (с вращением) Геделя, описываемой метрикой

$$ds^2 = (dx^0)^2 - dx^2 + \frac{1}{2} e^{2\Lambda x} dy^2 - dz^2 - 2e^{\Lambda x} dx^0 dy, \quad (4.5.32)$$

где Λ — космологическая постоянная.

Глава 5

Применение монадного метода для анализа проблем ОТО

Как уже неоднократно отмечалось, только благодаря методам задания систем отсчета общая теория относительности приобретает смысл, заключенный в ее названии. Только на их основе открывается возможность корректного анализа ряда принципиальных проблем общей теории относительности. К таковым принято относить, во-первых, проблему законов сохранения, во-вторых, определение гравитационных волн, в-третьих, ряд проблем, связанных с квантованием гравитации. Все они тесно связаны между собой, причем центральное место занимает проблема с законами сохранения в ОТО.

§ 5.1. Законы сохранения в ОТО

Монадный метод описания системы отсчета позволяет в каждой точке выделить из плотности тензора энергии-импульса материи $T_{\mu\nu}$ плотность наблюдаемой энергии ρ и плотность модуля полного импульса P :

$$\rho = T^{\mu\nu} \tau_\mu \tau_\nu; \quad \tilde{P}^\alpha = -h_\mu^\alpha \tau_\nu T^{\mu\nu}; \quad P = \sqrt{-h_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta}. \quad (5.1.1)$$

Если система отсчета нормальная, то имеется семейство пространственно-подобных гиперповерхностей, ортогональных конгруэнции ее мировых линий. Для любой такой гиперповерхности можно найти суммарное значение энергии материи, так как определенная выше плотность энергии является скаляром, а перенос скаляра не зависит от пути:

$$E = \int \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \tau_\nu d\sigma_\mu \equiv \int \sqrt{-g} P^\mu d\sigma_\mu. \quad (5.1.2)$$

Проблема видится в вопросе: можно ли ввести законы сохранения энергии, импульса и иных величин в искривленном пространстве-времени? На безуспешные попытки ее решения было затрачено чрезвычайно много усилий, поскольку, как ожидалось, так или иначе определенные гравитационные волны и их кванты (если они существуют) должны обладать энергией и импульсом (см., например, [7]). Последние же имеют смысл лишь в связи с законами сохранения.

5.1.1. Ситуация с законами сохранения энергии и импульса в ОТО

1. Напомним ключевое выражение, из которого выводятся законы сохранения энергии и импульса в плоском пространстве-времени (в декартовых координатах):

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0, \quad (5.1.3)$$

где $T^{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса материи. Записав интеграл от левой части этого выражения по 4-мерному объему, с помощью теоремы Остроградского—Гаусса можно перейти к интегрированию по 3-мерной гиперповерхности, ограничивающей выбранный 4-объем. Беря в качестве 4-объема область пространства-времени, заключенную между двумя пространственно-подобными гиперповерхностями

$$x_{(1)}^0 = \text{const}_{(1)} \quad \text{и} \quad x_{(2)}^0 = \text{const}_{(2)}$$

(см. рис. 5.1), и полагая, что на пространственной гиперповерхности в бесконечности $T^{\mu\nu} = 0$, получаем законы сохранения:

$$\int_{x_{(2)}^0} T^{\mu\nu} d\sigma_\nu - \int_{x_{(1)}^0} T^{\mu\nu} d\sigma_\nu = 0 \quad \rightarrow \quad \int T^{\mu 0} d^3x \equiv P^\mu = (\text{const})^\mu. \quad (5.1.4)$$

Здесь σ_ν — элемент гиперповерхности, включающий в себя вектор единичной нормали к этой гиперповерхности. Знак минус обусловлен тем, что при обходе по всей гиперповерхности, ограничивающей объем интегрирования, имеем противоположные знаки нормали.

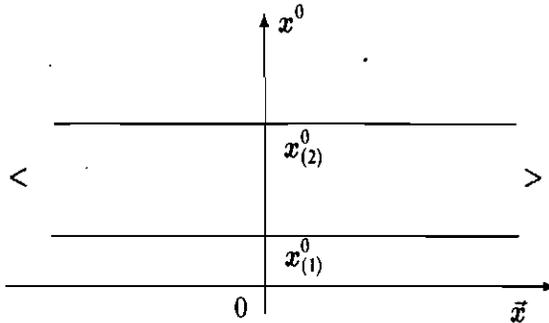


Рис. 5.1. Выбор 4-мерного объема для получения законов сохранения в плоском пространстве-времени

II. На ситуацию с законом сохранения энергии и импульса в общей теории относительности можно взглянуть под несколькими углами зрения.

В искривленном пространстве-времени соотношение (5.1.3) должно быть заменено на ковариантное выражение

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{-g}} \cdot \frac{\partial(\sqrt{-g} T^{\mu\nu})}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu T^{\alpha\nu} = 0, \quad (5.1.5)$$

ранее использованное при записи (постулировании) уравнений Эйнштейна. Однако, это выражение в общем случае не соответствует сохранению какой-либо величины, так как для перехода к интегрированию по гиперповерхности необходимо иметь обычную, а не ковариантную дивергенцию. «Лишним» оказывается последний член справа. Таким образом, *в искривленном пространстве-времени, вообще говоря, законы сохранения энергии и импульса отсутствуют, точнее, теряют смысл.*

III. Другое объяснение отсутствия законов сохранения энергии и импульса в ОТО состоит в следующем: чтобы проинтегрировать некую величину, необходимо снести ее значения в одну точку, однако для тензорных величин подобная операция зависит от пути переноса из одной точки в другую. Предпринимались попытки решить проблему законов сохранения посредством конкретизации путей переноса, например по геодезическим линиям. Однако при этом возникают другие трудности, связанные с тем, что во многих кон-

кретных ситуациях между парой точек можно провести несколько геодезических линий.

IV. Заметим, что сама искривленность пространства-времени еще не означает вообще отсутствия законов сохранения. Так, в ОТО имеет место закон сохранения электрического заряда. Этот закон в плоском пространстве-времени обычно связывается с соотношением, подобным (5.1.1):

$$\frac{\partial j^\nu}{\partial x^\nu} = 0, \quad (5.1.6)$$

где j^ν — вектор плотности 4-мерного электрического тока. В искривленном пространстве-времени имеем

$$\nabla_\nu j^\nu = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g} j^\nu)}{\partial x^\nu} = 0. \quad (5.1.7)$$

Отсюда получается закон сохранения заряда

$$\int_V (\nabla_\nu j^\nu) \sqrt{-g} d^4x = \oint \sqrt{-g} j^\nu d\sigma_\nu = 0 \quad \rightarrow \quad \int \sqrt{-g} j^\nu d\sigma_\nu = \text{const.} \quad (5.1.8)$$

Заметим, что в данном случае интегрируется не тензорная величина, а скаляр $j^\nu n_\nu$, т. е. вектор тока, свернутый с нормалью к гиперповерхности. В качестве нормали может выступать монада $n_\nu = \tau_\nu$ в кинематической калибровке.

5.1.2. Производные Ли и монадный оператор временного дифференцирования

На отсутствие законов сохранения энергии, импульса или момента импульса в общей теории относительности можно взглянуть с позиций симметрий пространственно-временного многообразия. Обычно в плоском пространстве-времени эти законы связываются соответственно с однородностью времени, пространства или с изотропией пространства. В общем случае искривленных многообразий свойства симметрии необходимо трактовать на языке векторов Киллинга.

При обсуждении решений уравнений Эйнштейна в главе 2 использовались полуинтуитивные представления о симметриях римановых пространств. В дифференциальной геометрии разработано

более строгое определение симметрии. Оно опирается на понятие (операцию) дифференцирования Ли, тесно связанное с монадным методом. Изложим основные сведения о производных Ли.

I. Пусть в римановом многообразии задано векторное поле (монада) ξ^μ , тогда можно определить тензорный оператор $\mathcal{L}_{(\xi)}$, называемый производной Ли вдоль векторного поля ξ^μ :

$$\mathcal{L}_{(\xi)} B_{\beta \dots}^{\nu \dots} = \xi^\sigma \nabla_\sigma B_{\beta \dots}^{\nu \dots} - B_{\beta \dots}^{\sigma \dots} \nabla_\sigma \xi^\nu - \dots + B_{\sigma \dots}^{\nu \dots} \nabla_\beta \xi^\sigma + \dots, \quad (5.1.9)$$

где $B_{\beta \dots}^{\nu \dots}$ — произвольный тензор, ∇_σ — оператор ковариантного дифференцирования. Расписывая явно оператор ∇ , легко привести производную Ли к более простому виду

$$\mathcal{L}_{(\xi)} B_{\beta \dots}^{\nu \dots} = \xi^\sigma \frac{\partial B_{\beta \dots}^{\nu \dots}}{\partial x^\sigma} - B_{\beta \dots}^{\sigma \dots} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\sigma} - \dots + B_{\sigma \dots}^{\nu \dots} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\beta} + \dots. \quad (5.1.10)$$

II. К производным Ли можно прийти, рассуждая следующим образом. Пусть в окрестности точки с координатами x^σ определен произвольный тензор $B_{\beta \dots}^{\mu \dots}(x^\sigma)$. Произведем бесконечно малое смещение вдоль вектора ξ^σ на величину $d\lambda$:

$$x^\sigma \rightarrow x'^\sigma = x^\sigma + \xi^\sigma d\lambda \quad (5.1.11)$$

и рассмотрим тензор с измененным аргументом

$$B_{\alpha \dots}^{\mu \dots}(x^\sigma + \xi^\sigma d\lambda) = B_{\alpha \dots}^{\mu \dots}(x^\sigma) + \xi^\sigma \frac{\partial B_{\alpha \dots}^{\mu \dots}}{\partial x^\sigma} d\lambda. \quad (5.1.12)$$

Понимая эту величину определенной в системе координат $\{x'\}$, преобразуем ее в первоначальную систему координат $\{x\}$

$${}'B_{\beta \dots}^{\nu \dots} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \dots \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} \dots B_{\alpha \dots}^{\mu \dots}, \quad (5.1.13)$$

где согласно (5.1.11)

$$\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} = \delta_\beta^\alpha + \xi_{\beta}^\alpha d\lambda; \quad \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \delta_\mu^\nu - \xi_{\mu}^\nu d\lambda. \quad (5.1.14)$$

Разность тензоров

$${}'B_{\beta \dots}^{\nu \dots} - B_{\beta \dots}^{\nu \dots} \equiv \mathcal{L}_{(\xi)} B_{\beta \dots}^{\nu \dots} d\lambda \quad (5.1.15)$$

называется дифференциалом Ли от тензора $B_{\beta \dots}^{\nu \dots}$ относительно векторного поля ξ^μ . Учитывая (5.1.12) и (5.1.13), приходим к выражению (5.1.10) для производной Ли.

III. Перечислим основные свойства производных Ли.

- 1) Производная Ли от суммы величин одинакового сорта равна сумме производных Ли от слагаемых.
- 2) Для производных Ли от произведения величин A и B справедливо правило Лейбница $\mathcal{L}_{(\xi)}(AB) = (\mathcal{L}_{(\xi)}A)B + A(\mathcal{L}_{(\xi)}B)$.
- 3) Производная Ли от тензорной плотности произвольного веса w также является тензорной плотностью того же веса.
- 4) Производная Ли от символов Кристоффеля определяется указанным выше способом и является тензорной величиной.

IV. В монадном методе, где задано времени-подобное поле вектора τ^μ , производные Ли играют чрезвычайно важную роль, — через них определяется монадный оператор временного дифференцирования. Чтобы это продемонстрировать, запишем производные Ли вдоль поля $\xi^\mu \equiv \tau^\mu$ от составляющих метрического тензора

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{(\tau)}\tau_\mu &= \tau^\sigma \tau_{\mu,\sigma} + \tau_\sigma \tau_{,\mu}^\sigma = \tau^\sigma (\tau_{\mu,\sigma} - \tau_{\sigma,\mu}) = a_\mu; \\ \mathcal{L}_{(\tau)}h_{\mu\nu} &= \tau^\sigma h_{\mu\nu,\sigma} + h_{\sigma\nu} \tau_{,\mu}^\sigma + h_{\mu\sigma} \tau_{,\nu}^\sigma = 2d_{\mu\nu}; \\ \mathcal{L}_{(\tau)}g_{\mu\nu} &= \tau_{\nu;\mu} + \tau_{\mu;\nu} = \tau_\nu a_\mu + \tau_\mu a_\nu - 2d_{\mu\nu}.\end{aligned}\quad (5.1.16)$$

Из определения (5.1.11) и записанных формул следует, что *оператор монадной временной производной представляет собой спроектированную на 3-мерное сечение производную Ли вдоль времени-подобного вектора τ .*

5.1.3. Векторы Киллинга и законы сохранения в ОТО

I. Используя производные Ли, можно определить подвижность риманова многообразия. Говорят, что риманово многообразие *допускает движение (подвижно) вдоль векторного поля ξ^μ* , если производная Ли от метрического тензора вдоль ξ^μ обращается в нуль:

$$\mathcal{L}_{(\xi)}g_{\mu\nu} = \xi^\sigma \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + g_{\sigma\nu} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\mu} + g_{\mu\sigma} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\nu} = 0. \quad (5.1.17)$$

Исходя из смысла производной Ли (5.1.15), можно сказать: подвижность многообразия означает, что измененная при смещении (5.1.11) метрика $g'_{\mu\nu}(x')$ должна быть точно такой же функцией аргумента x' , что и первоначальная функция $g_{\mu\nu}(x)$ ее начального

аргумента x , т. е. $g'_{\mu\nu}(x') = g_{\mu\nu}(x)$. Легко убедиться, что (5.1.17) можно записать иначе:

$$\mathcal{S}(\xi)g_{\mu\nu} = \xi_{\nu;\mu} + \xi_{\mu;\nu} = 0. \quad (5.1.18)$$

Уравнения (5.1.18) называются *уравнениями Киллинга*, а вектор ξ^σ , удовлетворяющий уравнению Киллинга, — *вектором Киллинга*.

II. Не всякое пространство допускает решение уравнений Киллинга, т. е. обладает векторами Киллинга, а следовательно и симметриями. Однако может случиться, что риманово многообразие допускает не один, а несколько векторов Киллинга. Если в римановом многообразии имеется несколько векторов Киллинга, то их линейная комбинация с произвольными постоянными коэффициентами также является вектором Киллинга. Это следует из линейности уравнений Киллинга (5.1.17).

Максимальное число возможных линейно-независимых векторов Киллинга (не в точке, а в многообразии)

$$N = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (5.1.19)$$

Для $n = 4$ максимальной симметрией обладает пространство-время Минковского. Десять векторов Киллинга соответствуют 10-параметрической группе Пуанкаре.

III. В частных метриках, обладающих векторами Киллинга, можно ввести соответствующие им законы сохранения. Действительно, пусть в рассматриваемом искривленном пространстве-времени имеется вектор Киллинга ξ_μ . Построим вектор $P^\nu = T^{\mu\nu}\xi_\mu$. Согласно (5.1.11) и уравнениям Киллинга (5.1.18) этот вектор удовлетворяет соотношению

$$\nabla_\nu P^\nu = (\nabla_\nu T^{\mu\nu})\xi_\mu + T^{\mu\nu}(\nabla_\nu \xi_\mu) = \frac{T^{\mu\nu}(\nabla_\nu \xi_\mu + \nabla_\mu \xi_\nu)}{2} = 0, \quad (5.1.20)$$

т. е. имеем свойство P^ν , аналогичное (5.1.7) для вектора плотности тока. Отсюда следует закон сохранения. Если вектор Киллинга ξ_ν времени-подобен, то можно говорить о законе сохранения энергии, если он пространственно-подобен — о законе сохранения импульса или момента импульса. При отсутствии векторов Киллинга нет смысла говорить о законах сохранения энергии и импульса.

IV. Исходя из изложенного, можно утверждать следующее:

- Оставаясь в рамках парадигмы общей теории относительности можно игнорировать отсутствие тех или иных законов сохранения. Их отсутствие не следует трактовать как нарушение этих законов, а означает лишь потерю их смысла. Для конкретно заданной классической системы можно при помощи уравнений Эйнштейна рассчитать метрику пространства-времени, посредством уравнений геодезических линий (уравнений движения) найти движение отдельных тел в этой метрике и с помощью монадного метода проинтерпретировать полученные результаты в используемой системе отсчета, в том числе и получить значения энергии и импульса рассматриваемой *материальной системы*.

- Законы сохранения энергии или импульса справедливы в искривленном пространстве-времени лишь тогда, когда оно обладает соответствующими векторами Киллинга.

- Проблемы возникают лишь при попытках решения некорректно поставленных задач в ОТО, как правило, обусловленных смешением понятий и принципов из разных метафизических парадигм. В этих случаях иногда может оказаться удобным использование неких вспомогательных понятий, соответствующих энергии и импульсу «гравитационного поля», однако при этом не следует забывать об их условном характере, не переносимом автоматически за пределы условий решаемой задачи.

Контрольные задания

1. Показать, что в метрике Шварцшильда (2.1.28) (в координатах кривизны) векторами Киллинга являются времени-подобный вектор

$$\xi_{(0)}^{\mu} = \{1, 0, 0, 0\}, \quad (5.1.21)$$

позволяющий говорить о законе сохранения энергии, и три пространственно-подобных вектора:

$$\begin{aligned} \xi_{(1)}^{\mu} &= \{0, 0, \sin \varphi; \operatorname{ctg} \theta \cos \varphi\}; \\ \xi_{(2)}^{\mu} &= \{0, 0, -\cos \varphi, \operatorname{ctg} \theta \sin \varphi\}; \\ \xi_{(3)}^{\mu} &= \{0, 0, 0, -1\}, \end{aligned} \quad (5.1.22)$$

соответствующие изотропии пространства и означающие наличие законов сохранения момента количества движения.

2. Показать, что в метрике Керра имеются два вектора Киллинга. Найти их.
3. Найти векторы Киллинга в метриках Фридмана.

§ 5.2. Псевдотензорный подход к законам сохранения

Энергия и импульс являются важнейшими понятиями физики и занимают важное место в современной теории поля вследствие законов их сохранения. Отсутствие этих законов в искривленном пространстве-времени, по мнению многих физиков, вызывает ряд трудностей, в частности при описании явлений квантовой теории или ожидаемых гравитационных волн, поэтому значительные усилия исследователей были нацелены на («насилованное») введение понятия энергии и импульса гравитационного поля, что позволило бы, наперекор изложенному, оставить в геометрической парадигме законы сохранения этих величин. Естественно, что речь могла идти лишь о некоем подобии понятий энергии и импульса, описываемом так называемым псевдотензором энергии-импульса гравитационного поля. Обсудим суть данного направления исследований и некоторые варианты решения, вызывавшие в свое время большой интерес.

5.2.1. Суть псевдотензорного подхода

Псевдотензорный подход основан на следующем широко используемом приеме в теоретической физике. Известно, что в ньютоновой механике в общем случае не сохраняется кинетическая энергия T механической системы. Однако закон сохранения энергии удастся «спасти», введя потенциальную энергию U материальных объектов так, что

$$\frac{d(T + U)}{dt} = 0. \quad (5.2.1)$$

Эйнштейн и ряд других авторов в свое время предложили аналогичный метод в искривленном пространстве-времени: следует требовать сохранения энергии и импульса P^μ материи вместе с дополнительным членом p^μ , понимаемым как энергия-импульс гра-

витационного поля. Тогда вместо (5.2.1) следует писать:

$$\frac{\partial \tilde{T}^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \equiv \frac{\partial (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})}{\partial x^\nu} = 0, \quad (5.2.2)$$

где нетензорный добавок $t^{\mu\nu}$ называют *псевдотензором энергии-импульса гравитационного поля*. Очевидно, что $t^{\mu\nu}$ не может быть тензором, так как действие нетензорного оператора $\partial/\partial x^\nu$ на тензорную величину не дает тензора.

Разберемся, что означает величина $t^{\mu\nu}$. Для этого перепишем уравнения Эйнштейна в форме

$$\frac{(-g)^N}{\kappa} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) = (-g)^N T^{\mu\nu}, \quad (5.2.3)$$

где N — целое или полуцелое число, и разобьем левую часть на два слагаемых:

$$\frac{(-g)^N}{\kappa} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) = \Theta^{\mu\nu} - (-g)^N t^{\mu\nu}. \quad (5.2.4)$$

Соотношение вида (5.2.2) выполняется, если $\Theta^{\mu\nu}$ имеет вид:

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{\partial h^{\mu\nu\lambda}}{\partial x^\lambda}, \quad (5.2.5)$$

где $h^{\mu\nu\lambda} = -h^{\mu\lambda\nu}$ — так называемый *суперпотенциал гравитационного поля*. Тогда очевидно, что

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial h^{\mu\nu\lambda}}{\partial x^\lambda} \right) = \frac{\partial}{\partial x^\nu} [(-g)^N (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})] = 0, \quad (5.2.6)$$

т. е. формально получена нужная форма закона сохранения энергии-импульса.

Казалось бы, проблема с законами сохранения решена, однако введение таких величин вызывает ряд новых проблем. Прежде всего, это неоднозначность. Можно построить счетное множество симметричных псевдотензоров эйнштейновского типа, используя в качестве суперпотенциалов выражения вида:

$$h_{\mu\cdot}^{\nu\lambda} = \frac{1}{2\kappa} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} [(-g)^N (g_\mu^\nu g^{\lambda\alpha} - g_\mu^\lambda g^{\nu\alpha})], \quad (5.2.7)$$

где, как отмечалось, N — любое целое или полуцелое число. Спрашивается, какое значение N нужно предпочесть? Различные авторы предлагали свои способы выбора N . Рассмотрим несколько из них.

5.2.2. Варианты псевдотензоров энергии-импульса

I. Псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля Эйнштейна (см. [14, с. 524–529; 626–628; 650–662]) определяется посредством специального способа превращения «лишнего» слагаемого в (5.1.5) в обычную дивергенцию. Исходя из выражения:

$$\sqrt{-g} T_{\mu;\nu}^{\nu} = \frac{\partial(\sqrt{-g} T_{\mu}^{\nu})}{\partial x^{\nu}} - \sqrt{-g} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} T_{\alpha}^{\nu}, \quad (5.2.8)$$

Эйнштейн предложил преобразовать последний член, пользуясь своими уравнениями, т. е.

$$\begin{aligned} -\sqrt{-g} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} T_{\alpha}^{\nu} &= -\frac{\sqrt{-g}}{\varkappa} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \left(R_{\alpha}^{\nu} - \frac{g_{\alpha}^{\nu} R}{2} \right) = \\ &= -\frac{\sqrt{-g}}{2\varkappa} \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} \left(R^{\nu\sigma} - \frac{g^{\nu\sigma} R}{2} \right). \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

Далее был использован тот факт, что в метрической лагранжевой формулировке ОТО уравнения Эйнштейна могут быть получены действием оператора Эйлера—Лагранжа на плотность лагранжиана $\sqrt{-g} \mathcal{L}_{gr}$, что позволяет записать (5.2.9) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{-g}}{2\varkappa} \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} \left[\frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{(gr)})}{\partial g_{\nu\sigma}} - \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left(\frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{(gr)})}{\partial (g_{\nu\sigma,\alpha})} \right) \right] &= \\ = \frac{\sqrt{-g}}{2\varkappa} \left[\frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{(gr)})}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left(\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{(gr)})}{\partial (g_{\nu\sigma,\alpha})} \right) \right] &= \\ = \frac{1}{2\varkappa} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left[g_{\mu}^{\alpha} (\sqrt{-g} \mathcal{L}_{(gr)}) - \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{(gr)})}{\partial (g_{\nu\sigma,\alpha})} \right] \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (\sqrt{-g} t_{\mu}^{\alpha}). \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

Отсюда находится псевдотензор Эйнштейна в виде

$$t_{\mu}^{\nu} = \frac{1}{2\varkappa \sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \left(\frac{g_{\mu\sigma}}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} [(-g)(g^{\alpha\lambda} g^{\nu\sigma} - g^{\lambda\sigma} g^{\nu\alpha})] \right). \quad (5.2.11)$$

Ему соответствует суперпотенциал

$$h_{\mu..}^{\nu\lambda} = \frac{g_{\mu\sigma}}{2\alpha\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} [(-g)(g^{\alpha\lambda}g^{\nu\sigma} - g^{\lambda\sigma}g^{\nu\alpha})], \quad (5.2.12)$$

а закон сохранения записывается следующим образом (при $N = 1/2$):

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{-g} T_\mu^\nu + \sqrt{-g} t_\mu^\nu) = 0. \quad (5.2.13)$$

II. Псевдотензор Ландау и Лифшица [7] был выведен, исходя из предположения о преимущественном характере локально-геодезической координатной системы. Было показано, что в этой координатной системе левая часть уравнений Эйнштейна может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) &= \frac{1}{(-g)} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left[\frac{1}{2\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} ((-g)(g^{\mu\nu}g^{\lambda\alpha} - g^{\mu\lambda}g^{\nu\alpha})) \right] \equiv \\ &\equiv \frac{1}{(-g)} \Theta^{\mu\nu} = \frac{1}{(-g)} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} h^{\mu\nu\lambda}. \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

Поскольку $h^{\mu\nu\lambda}$ антисимметрично по индексам ν и λ , было предложено выбрать эту величину в качестве суперпотенциала гравитационного поля. Очевидно, что в другой координатной системе соотношение (5.2.14) не выполняется. Авторы предложили считать добавочные выражения псевдотензором гравитационного поля. Следовательно суперпотенциал и псевдотензор гравитационного поля в подходе Ландау и Лифшица имеют вид:

$$h^{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} ((-g)(g^{\mu\nu}g^{\lambda\alpha} - g^{\mu\lambda}g^{\nu\alpha})); \quad (5.2.15)$$

$$t^{\mu\nu} = \frac{1}{2\alpha(-g)} \frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\alpha} ((-g)(g^{\mu\nu}g^{\lambda\alpha} - g^{\mu\lambda}g^{\nu\alpha})). \quad (5.2.16)$$

Закон сохранения записывается в форме

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} [(-g)(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})] = 0. \quad (5.2.17)$$

Эти выражения в общем случае отличаются от эйнштейновских.

III. В литературе анализировался псевдотензор, предлагавшийся независимо К. Меллером, Н. В. Мицкевичем и Э. Шрёдингером,

$$t_{\mu}^{\nu} = \frac{1}{2x\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} [\sqrt{-g}(g_{\mu\beta,\alpha} - g_{\mu\alpha,\beta})g^{\nu\beta}g^{\lambda\alpha}]. \quad (5.2.18)$$

IV. В литературе обсуждались и иные варианты псевдотензоров: Папанетру и ряда других авторов.

5.2.3. Несостоятельность псевдотензорного подхода

После получения псевдотензора Эйнштейна казалось, что проблема энергии-импульса гравитационного поля решена, однако вскоре Э. Шрёдингер и Бауэр показали, что энергия гравитационного поля, вычисляемая при помощи этого псевдотензора, изменяется при чисто пространственных преобразованиях координат, что естественно, поскольку псевдотензор не является тензором. Более того, Бауэр показал, что источник метрики Шварцшильда в сферических координатах обладает бесконечно большой энергией, вычисленной на основе псевдотензора Эйнштейна. Этот результат вошел в литературу под названием «парадокса Бауэра». Сложившаяся ситуация побудила поиски других выражений для псевдотензора гравитационного поля.

Однако и другие псевдотензоры обладали теми же недостатками. Было выполнено множество работ, в которых на конкретных примерах была продемонстрирована несостоятельность различных вариантов псевдотензора энергии-импульса гравитационного поля.

В группе Н. В. Мицкевича был получен еще более разительный результат — было показано, что если взять метрику пространства-времени Минковского, где заведомо отсутствует гравитационное поле, записать ее в некоей криволинейной координатной системе и подставить ее в псевдотензор, например Эйнштейна, можно получить отличный от нуля результат для «энергии» гравитационного поля.

Наконец, в 1960-х годах К. Меллер сформулировал 5 условий, которым должен удовлетворять искомый псевдотензор гравитационного поля:

- 1) Плотность (веса 1) псевдотензора $\bar{t}_{\mu}^{\nu} \equiv \sqrt{-g} t_{\mu}^{\nu}$ должна алгебраически выражаться через компоненты метрики и их производные.
- 2) Должен иметь место (слабый) закон сохранения $\partial(\bar{t}_{\mu}^{\nu})/\partial x^{\nu} = 0$.

- 3) При чисто пространственных преобразованиях координат \tilde{t}_μ^ν должно вести себя как плотность 4-вектора, т. е. должен отсутствовать парадокс Бауэра.
- 4) При преобразованиях координат, сводящихся к тождественным преобразованиям вдали от островной системы, интегральная величина $P_\mu = \int \tilde{t}_\mu^0 d^3x$ не должна изменяться.
- 5) Для островной системы в системе центра масс интегральный вектор энергии-импульса P_μ должен иметь вид $P_\mu = \{Mc^2, 0, 0, 0\}$, где M — полная масса системы.

Эти условия должны были исключить возможность упомянутых нелепых результатов. Меллер же доказал теорему, что *из компонент метрического тензора и их производных в принципе невозможно построить комплекс величин, удовлетворяющих всем сформулированным требованиям.*

Несмотря на то, что все упомянутые исследования проводились как бы в рамках общей теории относительности, они были нацелены на достижение цели, диктуемой иной метафизической парадигмой — стандартной теорией поля в плоском пространстве-времени.

5.2.4. Монодные векторы энергии гравитационного поля

I. В общем случае полная энергия материи, определенная согласно (5.1.2), не обязана сохраняться. Предпринимались попытки спасти закон сохранения энергии в рамках монодного метода, руководствуясь принципами, схожими с псевдотензорным подходом, т. е. добавлением к энергии материи некоторого выражения. Проанализируем этот подход [1, 5].

Для описания только закона сохранения энергии следует использовать четыре (а не 10, как это было выше) уравнения Эйнштейна

$$\frac{\tau_\mu}{\mathfrak{a}} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) = T^{\mu\nu} \tau_\mu \equiv P^\nu, \quad (5.2.19)$$

где P^ν — 4-вектор энергии материи. Разобьем левую часть этих уравнений на два векторных слагаемых

$$\frac{\tau_\mu}{\varkappa} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) = \Theta^\nu - p^\nu, \quad (5.2.20)$$

где

$$\Theta^\nu = \mathcal{F}^{\nu\mu}. \quad (5.2.21)$$

Здесь тензор $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ играет роль суперпотенциала в псевдотензорном подходе; он антисимметричен $\mathcal{F}^{\mu\nu} = -\mathcal{F}^{\nu\mu}$. Вследствие соотношения

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (5.2.22)$$

имеем закон сохранения

$$\nabla_\nu \Theta^\nu = \nabla_\nu (P^\nu + p^\nu) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} [\sqrt{-g} (P^\nu + p^\nu)] = 0, \quad (5.2.23)$$

где настоящий вектор p^ν является аналогом псевдотензора гравитационного поля. Сохраняющейся величиной является

$$\tilde{E} = \int \sqrt{-g} (P^\nu + p^\nu) d\sigma_\nu. \quad (5.2.24)$$

II. Рассмотрим конкретную реализацию этой процедуры, выбрав в качестве монадного суперпотенциала выражение

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{\varkappa} (\tau_{\nu,\mu} - \tau_{\mu,\nu}) = \frac{1}{\varkappa} (-2\omega_{\mu\nu} - a_\mu \tau_\nu + a_\nu \tau_\mu). \quad (5.2.25)$$

Учитывая монадный вид проекций уравнений Эйнштейна (4.4.10) и (4.4.11), из (5.2.20) находим проекции вектора p^ν в вакууме:

$$p(0) = p^\nu \tau_\nu = \frac{1}{\varkappa} (\omega_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta} + d_{\alpha\beta} d^{\alpha\beta} + a_\alpha a^\alpha - \partial_T d); \quad (5.2.26)$$

$$\tilde{p}_\sigma = -h_{\sigma\nu} p^\nu = \frac{1}{\varkappa} [\tilde{\nabla}_\nu (d'_\sigma + \omega'_{\sigma} + h'_\sigma d) + h_{\nu\sigma} (\partial_T - d) a^\nu]. \quad (5.2.27)$$

Отсюда видно, как добавок $p(0)$ в сохраняющемся обобщенном выражении для энергии (5.2.26) строится из физико-геометрических тензоров, характеризующих систему отсчета, причем это имеет место и в плоском пространстве-времени. В частности, в него

входят квадратично тензоры угловой скорости вращения и ускорения системы отсчета. Переходя от одной системы отсчета к другой, можно в широких пределах изменять величины (5.2.26) и (5.2.27). По этой причине величину p^ν правильнее назвать *вектором энергии грави-инерциального поля*.

III. Особенно рельефно проявляется суть вектора p^ν в вакууме в системах отсчета, где $d_{\alpha\beta} = 0$:

$$p(0) = \frac{1}{\varepsilon}(\omega_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta} + a_\alpha a^\alpha); \quad \bar{p}_\sigma = \frac{1}{\varepsilon}(\tilde{\nabla}_\nu \omega_{\cdot\sigma}^\nu - \partial_T a_\sigma). \quad (5.2.28)$$

Данное выражение для плотности энергии грави-инерциального поля очень напоминает плотность энергии электромагнитного поля (4.4.34), записанную через компоненты электрической и магнитной напряженностей.

IV. В метрике Шварцшильда в покоящейся системе отсчета плотность энергии грави-инерциального поля имеет вид:

$$p(0) = \frac{1}{\varepsilon} a_\alpha a^\alpha = -\frac{M^2 G}{8\pi r^4} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \simeq -\frac{g^2}{8\pi G}, \quad (5.2.29)$$

где g — ускорение силы тяжести.

V. Из изложенного видно, что монадный подход обладает рядом преимуществ по сравнению с псевдотензорным:

- В нем удастся ввести истинные скаляры для выражения энергии грави-инерциального поля, для которых корректно определена операция интегрирования.
- Скалярные плотности энергии строятся из монадных физико-геометрических тензоров, т. е. получающиеся величины допускают корректную интерпретацию.

VI. Однако следует констатировать, что монадный подход не решает задачи определения энергии гравитационного поля по следующим причинам.

- Введенная выше плотность энергии грави-инерциального поля $p(0)$ может быть отличной от нуля даже в плоском пространстве-времени в неинерциальных системах отсчета.

• Как и в случае псевдотензорного подхода, встает проблема неоднозначности энергии гравитационно-инерциального поля. Имеется бесконечное число способов определения монадного вектора энергии гравитационно-инерциального поля, отличающихся выбором тензора суперпотенциала $\mathcal{F}_{\mu\nu}$. В общем случае можно выбрать величину

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{\varepsilon} [& c_{01}\omega_{\mu\nu} + c_{02}(\tau_\mu a_\nu - \tau_\nu a_\mu) + c_{03}(\tau_\mu \tilde{\nabla}_\lambda d_\nu^\lambda - \tau_\nu \tilde{\nabla}_\lambda d_\mu^\lambda) + \\ & + c_{04}(\tau_\mu \tilde{\nabla}_\lambda \omega_\nu^\lambda - \tau_\nu \tilde{\nabla}_\lambda \omega_\mu^\lambda) + c_{05}(\tau_\mu \partial_T a_\nu - \tau_\nu \partial_T a_\mu) + \\ & + c_{06}(\tau_\mu \tilde{\nabla}_\nu d - \tau_\nu \tilde{\nabla}_\mu d) + \dots]. \end{aligned} \quad (5.2.30)$$

Здесь под многоточием следует понимать выписанные слагаемые, умноженные на d с некоторыми коэффициентами c_{1s} , затем те же слагаемые, умноженные на $a_\alpha a^\alpha$ с коэффициентами c_{2s} и т. д. Итого, в общем случае имеем бесконечно много возможностей.

Использованное выше определение представляет собой частный случай, когда $c_{01} = -2$, $c_{02} = 1$, а остальные коэффициенты равны нулю.

• Легко понять, что все таким образом определенные плотности энергии гравитационно-инерциального поля соответствуют введению наряду с реальной материей еще фиктивного «материального» поля (инерции) с плотностью $\rho \sim 1/\varepsilon$, заполняющего все пространство. При формальном изменении системы отсчета плотность фиктивной материи остается прежней, но меняются характеристики системы отсчета, что в физическом плане означает генерирование или уничтожение материи, не вызванное никакими физическими процессами.

Положение можно было бы исправить, материализовав систему отсчета, т. е. связав ее с обычными видами материи, как это имеет место в случае выбора сопутствующей материи системы отсчета в метриках Фридмана. Но эта ситуация, по определению, диктует использование тензора энергии-импульса материи $T_{\mu\nu}$.

• Когда возникает необходимость одновременно рассматривать вопрос о сохранении энергии и импульса вдоль выделенного направления, целесообразно использовать диадный метод. Диада τ^μ, l^μ позволяет производить интегрирование в 3-мерных пространственно-подобных сечениях используемой системы отсчета скалярных величин:

$P(0) = T^{\mu\nu} \tau_\mu \tau_\nu$ — плотности энергии материи и $P(1) = T^{\mu\nu} l_\mu \tau_\nu$ — плотности импульса материи вдоль направления l^μ .

• Если же нужно рассмотреть вопрос об определении или о сохранении энергии и проекций импульса материи по всем трем ортогональным пространственным направлениям, то следует использовать тетрадный метод, где плотности энергии и импульса материи определяются симметричным образом:

$$P(\alpha) = T^{\mu\nu} g_\mu(\alpha) g_\nu(0) \equiv T^{\mu\nu} g_\mu(\alpha) \tau_\nu. \quad (5.2.31)$$

Для получения аналогов законов сохранения энергии и проекций импульса в симметричном виде опять можно воспользоваться методикой, изложенной выше. Отметим, что в тетрадном подходе опять можно ввести бесконечно много тетрадных комплексов энергии-импульса грави-инерциального поля. Все они оказываются несостоятельными по перечисленным выше причинам для случая вектора энергии грави-инерциального поля. Касаясь истории данных исследований, отметим, что в 70-х – 1980-х годах ряд авторов формулировал необходимые требования к тетрадным комплексам энергии-импульса, аналогичные требованиям Меллера к псевдотензорам. Доказывались теоремы, что на основе тетрадных комплексов такого рода невозможно решить поставленную физическую задачу.

Контрольные задания

1. Записать выражения для проекций моадного вектора энергии грави-инерциального поля (5.2.26) и (5.2.27) для метрик Фридмана.
2. Записать выражения для проекций моадного вектора энергии грави-инерциального поля (5.2.26) и (5.2.27) в метрике Керра в хронометрической и кинеметрической системах отсчета.

§ 5.3. Гравитационные волны в ОТО

Другая проблема общей теории относительности состоит в определении понятия гравитационных волн. Она привлекала пристальное внимание физиков в течение всего XX века. По этой теме было выполнено много теоретических исследований, были затрачены большие средства на попытки экспериментального обнаружения гравитационных волн, однако проблема так и не была решена.

Прежде всего следует отметить, что, как показывают оценки, в реальных ситуациях гравитационные волны настолько слабы, что пока не могут быть обнаружены современными приборами. Ведущиеся экспериментальные поиски рассчитаны на сверхмощные источники, главным образом, гипотетической природы. Фактически обсуждаются предполагаемые явления, лежащие за пределами возможностей современного эксперимента, но представляющие принципиальный интерес для понимания физического мироздания. Это означает, что пока можно опираться лишь на те или иные теоретические соображения и гипотезы.

Как уже неоднократно отмечалось, в общей теории относительности реализовано глубокое единство гравитации и инерции. По сути дела в ней рассматриваются не чисто гравитационные, а гравитационно-инерциальные процессы, описываемые характеристиками системы отсчета. По этой причине правильнее говорить не о гравитационных волнах, а о *гравитационно-инерциальных волновых процессах*. Поскольку понятие гравитации неразрывно связано с наличием искривления пространства-времени, при рассмотрении данной проблемы, как правило, стараются опереться на тензор кривизны.

При обсуждении проблемы гравитационно-инерциальных волн в терминах составляющих метрического тензора главные трудности обусловлены нелинейностью уравнений Эйнштейна, поскольку для их решений отсутствует принцип суперпозиции, типичный для волновых решений линейных уравнений.

Другая трудность, также тесно связанная с нелинейностью, состоит в сложности выделения динамических степени свободы, т. е. величин, непосредственно описывающих волну и ее поляризации. Так, в случае электромагнитного излучения таковыми являются две поперечные (относительно направления распространения волны) компоненты векторного потенциала. Для ожидаемых гравитационных волн эту задачу удастся решить лишь в некоторых частных случаях.

Следует выделить **четыре главные направления исследований гравитационно-инерциальных волновых процессов**:

- 1) *алгебраический подход* опирающийся на алгебраическую классификацию Петрова пространств Эйнштейна;
- 2) *референционный анализ гравитационно-инерциальных волновых процессов*, тесно связанный с монадным методом описания систем отсчета;

- 3) анализ грави-инерциальных волновых процессов на базе диадного метода, т. е. на основе обобщения монадного метода на случай двух векторных полей, соответствующих 4-скорости системы отсчета τ^μ и направлению распространения волнового процесса l^μ ;
- 4) подход на основе линеаризованной теории гравитации (анализ слабых гравитационных волн).

Приступая к рассмотрению этих подходов, отметим тесную связь проблемы гравитационных волн с проблемой энергии-импульса гравитационного поля. Как ожидается, так или иначе введенные гравитационные волны должны обладать энергией-импульсом. Однако поскольку последняя проблема до сих пор так и не решена, постараемся обсуждать проблему грави-инерциальных волн независимо от понятий энергии и импульса.

5.3.1. Алгебраические критерии гравитационных волн

I. В 1960–1970-х годах в связи с открытием алгебраической классификации Петрова пространств Эйнштейна сразу же встал вопрос о физическом смысле пространств различных алгебраических типов и подтипов. Была высказана идея, поддержанная многими исследователями, что некоторые алгебраически специальные типы метрик описывают волновые решения уравнений Эйнштейна. Это побудило поиск алгебраических критериев гравитационных волн.

II. Суть исследований по поиску алгебраических критериев гравитационных волн можно пояснить на примере электромагнитных волн. Как известно, электромагнитное излучение (в волновой зоне) обладает тем свойством, что два инварианта, построенные из напряженностей электрического и магнитного полей, обращаются в нуль:

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(H^2 - E^2) = 0; \quad F_{\mu\nu}\overset{*}{F}{}^{\mu\nu} = E_k H^k = 0, \quad (5.3.1)$$

где использовано обозначение:

$$\overset{*}{F}{}_{\mu\nu} = \frac{F^{\alpha\beta} E_{\mu\nu\alpha\beta}}{2}. \quad (5.3.2)$$

Здесь, напомним, $E_{\mu\nu\alpha\beta} = \sqrt{-g} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ — тензор Леви-Чивиты, представляемый через символы Леви-Чивиты.

III. При рассмотрении гравитации, как правило, проводятся аналогии между электромагнитными и гравитационными величинами, причем это делается по-разному. Ряд авторов полагает, что наиболее естественно сопоставлять тензор $F_{\mu\nu}$ с тензором Римана—Кристоффеля $R_{\mu\nu\alpha\beta}$, тогда аналогами двух электромагнитных инвариантов следует считать следующие квадратичные и кубичные инварианты, построенные из тензора кривизны:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}; & \quad R_{\alpha\beta\mu\nu} \overset{*}{R}^{\alpha\beta\mu\nu}; \\ R_{\alpha\beta\sigma\mu}R^{\sigma\mu\gamma\lambda}R_{\gamma\lambda}^{\dots\alpha\beta}; & \quad R_{\alpha\beta\sigma\mu}R^{\sigma\mu\gamma\lambda} \overset{*}{R}^{\dots\alpha\beta}_{\gamma\lambda}, \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

где использованы обозначения для дуального тензора кривизны

$$\overset{*}{R}^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{R^{\alpha\beta}_{\dots\lambda\sigma}E^{\mu\nu\lambda\sigma}}{2} = \frac{R^{\mu\nu}_{\dots\lambda\sigma}E^{\alpha\beta\lambda\sigma}}{2}. \quad (5.3.4)$$

IV. Алгебраические критерии гравитационных волн состоят в требовании обращения в нуль выписанных в (5.3.3) инвариантов по образу и подобию алгебраических свойств электромагнитных волн (5.3.1). Именно это утверждается вторым критерием гравитационных волн Бея. Ряд иных критериев либо ослабляет данный критерий Бея, либо усиливает его некоторым дополнительным требованием.

V. Продолжим пояснять суть алгебраической классификации Петрова пространств Эйнштейна на примере электромагнитного поля. Для тензора электромагнитного поля можно записать характеристическое уравнение:

$$\|F_{\mu\nu} - \lambda\eta_{\mu\nu}\| = 0. \quad (5.3.5)$$

Непосредственное вычисление определителя приводит к уравнению на собственные значения λ :

$$\lambda^4 + (H^2 - E^2)\lambda^2 - (E_k H^k)^2 = 0, \quad (5.3.6)$$

где коэффициентами являются выписанные выше электромагнитные инварианты. Алгебраическая классификация электромагнитных полей основана на анализе корней данного биквадратного уравнения.

VI. Для случая гравитации также записывается характеристическое уравнение, только теперь оно пишется для компонент тензора

Римана—Кристоффеля. Можно показать (см. [9]), что оно представляется в виде

$$\|M_{AB} - \lambda \tilde{g}_{AB}\| = 0, \quad (5.3.7)$$

где M_{AB} — комплексная 3×3 -матрица, построенная из комбинаций тензора кривизны, \tilde{g}_{AB} — метрический тензор бивекторного пространства:

$$\tilde{g}_{AB} \rightarrow g_{\alpha\beta\mu\nu} = (g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}). \quad (5.3.8)$$

Легко видеть, что $g_{\alpha\beta\mu\nu}$ обладает такими же свойствами симметрии, что и тензор Римана—Кристоффеля. Расписывая характеристическое уравнение, можно убедиться, что его коэффициентами являются выписанные в (5.3.3) гравитационные инварианты.

VII. В зависимости от значений корней характеристического кубического уравнения определяются 6 разновидностей (подтипов) пространств Эйнштейна, которые составляют три типа Петрова. Их принято изображать с помощью диаграммы Пенроуза—Петрова (рис. 5.2). Из диаграммы видно, что первый тип по Петрову T_1 состоит из трех

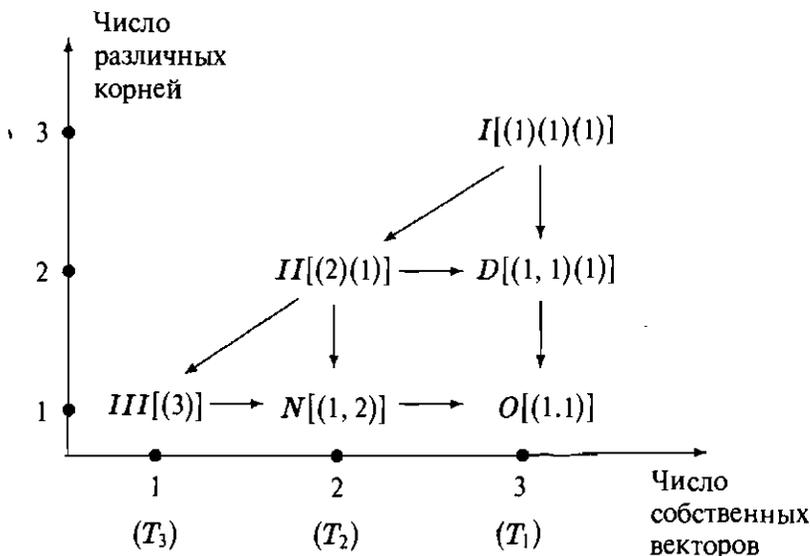


Рис. 5.2. Диаграмма Пенроуза—Петрова

подтипов: I , D и O , второй тип по Петрову T_2 содержит два подтипа II и N , а третий тип T_3 определяется одним подтипом III .

VIII. Именно для подтипов N и III все выписанные выше инварианты тензора кривизны обращаются в нуль, т. е. имеет место своеобразная ситуация, когда 4-мерное пространство-время искривлено, а его тензорные инварианты равны нулю. На этом основании считается, что гравитационные волны описываются решениями уравнений Эйнштейна, принадлежащими подтипам N и III . Более тонкий алгебраический критерий Лихнеровича утверждает, что волновыми являются только пространства, принадлежащие типу N .

Для электромагнитных волн также можно записать диаграмму типа Пенроуза—Петрова, однако она будет проще. В ней содержатся лишь три подтипа. Тот подтип, который соответствует обращению в нуль двух инвариантов (5.3.1) также естественно обозначить как подтип N .

IX. Перечислим главные недостатки алгебраических критериев.

- Поскольку алгебраический подход опирается на аналогию с электромагнитным полем, то следует иметь в виду, что условие равенства нулю двух инвариантов электромагнитного поля еще не означает наличия электромагнитного излучения. Всегда можно так подобрать статические электрическое и магнитное поля, чтобы их инварианты обращались в нуль. Таким образом, даже для случая электромагнитного излучения недостаточно выполнения лишь алгебраического волнового критерия. Аналогичный довод можно привести и в случае гравитации.

- Имеются явные примеры метрик, не удовлетворяющих ни одному из перечисленных алгебраических волновых критериев, однако по ряду других соображений их следует причислить к волновым. Таким примером являются цилиндрические волны Эйнштейна—Розена, рассмотренные ниже.

- К недостаткам алгебраического подхода можно отнести также множественность вариантов критерия гравитационных волн при отсутствии критерия, выделяющего один из них.

- Рассмотренные критерии относятся к идеализированным метрикам, далеким от соответствия с физической реальностью. Внесение сколь угодно малой массы в пространство, ранее удовлетворявшее какому-либо волновому критерию, существенно изменяет его алгеб-

раический тип. В работах некоторых авторов метрики представлялись в виде суперпозиции вкладов различных подтипов по Петрову.

Эти и ряд других обстоятельств заставили дополнять алгебраические критерии рядом других соображений. Отметим также, что анализ алгебраических свойств метрик относится как к вакуумным, так и невакуумным метрикам, т. е. справедлив и для случаев, где имеют место грави-инерциальные процессы с участием физических бозонных или материальных полей.

5.3.2. Референционный анализ грави-инерциальных волновых процессов

Как и в случае неудач с определением энергии-импульса гравитационного поля в псевдотензорном подходе, предпринимались попытки преодолеть или осмыслить возникшие трудности с помощью понятий системы отсчета (и ориентаций). Здесь можно выделить три направления поиска с целью:

- 1) осмыслить ситуацию в алгебраическом подходе в рамках понятий системы отсчета;
- 2) ввести в терминах понятий систем отсчета дифференциальный критерий грави-инерциальных волновых процессов;
- 3) исследовать понятие грави-инерциальной волны (волновых процессов) непосредственно в терминах монадных физико-геометрических тензоров.

Алгебраические критерии в монадном виде

Ряд алгебраических критериев формулировался с использованием вектора монады τ^μ . В частности, второму критерию Бея оказался эквивалентным критерий Мизры и Сингха, согласно которому пустое пространство-время с отличным от нуля тензором Римана—Кристоффеля описывает гравитационные волны в том и только в том случае, когда тензоры

$$E_{\alpha\lambda} = R_{\alpha\beta\lambda\mu} \tau^\beta \tau^\mu \equiv X_{\alpha\lambda}; \quad H_{\alpha\lambda} = {}^*R_{\alpha\beta\lambda\mu} \tau^\beta \tau^\mu, \quad (5.3.9)$$

где τ^μ — единичный времени-подобный вектор, удовлетворяют соотношениям:

$$E_{\alpha\lambda} E^{\alpha\lambda} - H_{\alpha\lambda} H^{\alpha\lambda} = 0; \quad E_{\alpha\lambda} E_\beta^\lambda E^{\beta\gamma} = 0; \quad H_{\alpha\lambda} H_\beta^\lambda H^{\beta\gamma} = 0, \quad (5.3.10)$$

т. е. имеют место свойства, аналогичные свойствам тензора электромагнитного поля в электромагнитной волне. Показано, что этот критерий относит к волновым алгебраически специальные подтипы *N* и *III*.

Дифференциальные волновые критерии гравитационных волн

В ряде работ предлагались дифференциальные волновые критерии, которым должен удовлетворять тензор Римана—Кристоффеля в случае существования гравитационных волн, а на самом деле неких волновых процессов, связанных с искривлением пространства-времени. В общековариантном монадном виде такие референционные критерии означают выполнение следующих условий:

- 1) Компоненты тензора Римана—Кристоффеля, спроецированные посредством τ^μ и h^μ_ν используемой системы отсчета, т. е.

$$R_{(N)} = \{X_{\mu\nu}, Y_{\mu\nu\lambda}, Z_{\mu\nu\alpha\beta}\},$$

должны удовлетворять волновым уравнениям вида

$$(\partial_T^2 - h^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu) R_{(N)} = \Phi_{(N)}, \quad (5.3.11)$$

где $\Phi_{(N)}$ — произвольная тензорная функция координат, не содержащая производных выше первого порядка от $R_{(N)}$, представляющего собой собирательное обозначение всех проекций тензора Римана—Кристоффеля.

- 2) Левая часть уравнений (5.3.11) должна быть нетривиальной хотя бы для одной компоненты $R_{(N)}$, т. е. соответствующий тензор $R_{(N)}$ должен быть нестационарным и пространственно-неоднородным:

$$\partial_T R_{(N)} \neq 0; \quad \tilde{\nabla}_\nu R_{(N)} \neq 0. \quad (5.3.12)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что для пространств Эйнштейна имеет место тождество

$$g^{\lambda\sigma} \nabla_\lambda \nabla_\sigma R_{\mu\alpha\beta\nu} + R_{\sigma\alpha\beta}^\lambda R_{\lambda\mu\nu}^\sigma + 2(R_{\sigma\alpha\nu\lambda} R_{\mu\beta}^{\lambda\sigma} + R_{\alpha\mu\sigma}^\lambda R_{\nu\lambda\beta}^\sigma) = 0, \quad (5.3.13)$$

Отсюда следует, что существенным является именно второе требование.

Проецируя (5.3.11) или тождества (5.3.13) посредством τ^μ и h_ν^μ и переходя к монадным величинам и операторам, получаем соотношения:

$$\begin{aligned}(\partial_T^2 - h^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu) X_{\alpha\beta} &= \Phi_{\alpha\beta}^{(x)}; \\(\partial_T^2 - h^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu) Y_{\alpha\beta\sigma} &= \Phi_{\alpha\beta\sigma}^{(y)}; \\(\partial_T^2 - h^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu) Z_{\alpha\beta\sigma\lambda} &= \Phi_{\alpha\beta\sigma\lambda}^{(z)};\end{aligned}\tag{5.3.14}$$

где $\Phi_{\alpha\beta}^{(x)}$, $\Phi_{\alpha\beta\sigma}^{(y)}$, $\Phi_{\alpha\beta\sigma\lambda}^{(z)}$ — ковариантные тензорные функции, не содержащие производных выше первого порядка от проекций тензора Римана—Кристоффеля.

Этот критерий в ряде случаев соответствует упомянутым выше алгебраическим критериям гравитационных волн, фактически означая различные способы обрезания тождества (5.3.13).

Если референционный критерий выполняется не для всех трех тензоров X , Y , Z , а только для одного или двух из них, то можно говорить о X -, Y -, Z -волновых процессах или о смеси их. (Отметим, что в вакууме, вследствие соотношения $R_{\mu\nu} = 0$, величины $X_{\mu\nu}$ и $Z_{\alpha\mu\beta\nu}$ оказываются связанными друг с другом, поскольку в этом случае $X_{\mu\nu} + Z_{\mu\alpha\nu}^\alpha = 0$, т. е. тогда достаточно говорить лишь о волновых процессах двух типов: X и Y .)

Физико-геометрические тензоры волнового процесса

Важной задачей референционного подхода является выяснение условий существования грави-инерциальных волновых процессов в зависимости от значений и свойств физико-геометрических тензоров. В частности, можно сделать некоторые выводы об отсутствии волнового процесса в искривленном пространстве-времени (в указанном выше смысле) в зависимости от обращения в нуль этих тензоров в отдельности или совместно в различных комбинациях. Возможны восемь случаев:

$$(1) \quad a_\mu = 0; \quad d_{\mu\nu} = 0; \quad \omega_{\mu\nu} = 0; \tag{5.3.15}$$

$$(2) \quad a_\mu \neq 0; \quad d_{\mu\nu} = 0; \quad \omega_{\mu\nu} = 0; \tag{5.3.16}$$

$$(3) \quad a_\mu \neq 0; \quad d_{\mu\nu} \neq 0; \quad \omega_{\mu\nu} = 0; \tag{5.3.17}$$

$$(4) \quad a_\mu = 0; \quad d_{\mu\nu} \neq 0; \quad \omega_{\mu\nu} = 0; \tag{5.3.18}$$

$$(5) \quad a_\mu = 0; \quad d_{\mu\nu} = 0; \quad \omega_{\mu\nu} \neq 0; \quad (5.3.19)$$

$$(6) \quad a_\mu \neq 0; \quad d_{\mu\nu} = 0; \quad \omega_{\mu\nu} \neq 0; \quad (5.3.20)$$

$$(7) \quad a_\mu \neq 0; \quad d_{\mu\nu} \neq 0; \quad \omega_{\mu\nu} \neq 0; \quad (5.3.21)$$

$$(8) \quad a_\mu = 0; \quad d_{\mu\nu} \neq 0; \quad \omega_{\mu\nu} \neq 0. \quad (5.3.22)$$

Анализ показывает, что гравитационно-инерциальные волновые процессы отсутствуют в случаях (1), (2) и (5), во всех остальных 5 случаях волновые процессы возможны. Исследовались и более тонкие условия отсутствия гравитационно-инерциальных волновых процессов в зависимости от обращения в нуль производных от физико-геометрических тензоров.

Число возможностей существенно сокращается, если ограничиться рассмотрением лишь нормальных систем отсчета, когда $\omega_{\mu\nu} = 0$. Тогда отпадают последние четыре возможности (5)–(8) и остаются лишь два случая (3) и (4). Из (5.3.17) и (5.3.18) видно, что в них необходимым условием является отличие от нуля тензора скоростей деформаций. В нормальных системах отсчета напрашивается простая классификация гравитационно-инерциальных волновых процессов в зависимости от равенства или неравенства нулю вектора a_μ .

Контрольные задания

1. Показать, что характеристическое уравнение (5.3.7) для пространств Эйнштейна посредством операций сложения в определителе строк и столбцов (с некоторыми комплексными коэффициентами) приводится к виду

$$|M_{AB} - \tilde{g}_{AB}| = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} X + iY + \lambda I & 0 \\ 0 & -(X - iY + \lambda I) \end{vmatrix} = 0, \quad (5.3.23)$$

где 3×3 -матрицы X и Y определены через компоненты тензора Римана—Кристоффеля в (1.4.8), а I — единичная 3×3 -матрица.

2. Доказать дифференциальное (волновое) тождество для тензора Римана—Кристоффеля (5.3.13), исходя из тождеств Бианки.

§ 5.4. Диадный метод

В рамках референционного подхода к описанию гравитационных волн естественно использовать более тонкий (нежели монадный) диадный метод, т. е. метод $(1 + 1 + 2)$ -расщепления 4-мерного про-

странства-времени, занимающий промежуточное положение между монадным и тетрадным методами. Это объясняется тем, что в случае волновых процессов оказывается физически выделенным еще одно — пространственно-подобное — направление распространения волнового процесса l^μ . Добавляя его к ранее определенной монаде τ^μ , приходим к двум векторам — диаде $\{\tau^\mu, l^\mu\}$.

5.4.1. Общековариантный диадный метод

Диадный метод, как и монадный, можно построить как в общековариантном виде, никак не связанном с выбором координатных систем, так и в групповых калибровках, когда координатные системы специальным образом привязаны к векторам диады. Диадный метод, как и монадный, естественно представить в виде трех составных частей [1, 5].

Алгебра диадного метода

В общековариантной формулировке диадного метода следует исходить из задания двух взаимно ортогональных конгруэнций. Будем полагать, что одна из них является времени-подобной, соответствующей мировым линиям приборов системы отсчета, а другая — пространственно-подобной. Вдоль них вводятся единичные касательные векторы τ^μ и l^μ (см. рис. 5.3).

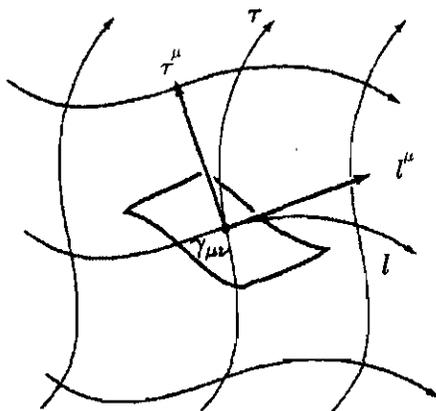


Рис. 5.3. Локальное $(1+1+2)$ -расщепление 4-мерного пространства-времени

В диадном методе метрический тензор представляется в виде

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu}(0)g_{\nu}(0) - g_{\mu}(1)g_{\nu}(1) - \gamma_{\mu\nu} \equiv \tau_{\mu}\tau_{\nu} - l_{\mu}l_{\nu} - \gamma_{\mu\nu}, \quad (5.4.1)$$

где составляющие удовлетворяют условиям ортонормированности:

$$\tau_{\mu}\tau^{\mu} = 1; \quad l_{\mu}l^{\nu} = -1; \quad \gamma_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu} = 2; \quad \tau_{\mu}l^{\mu} = \tau_{\mu}\gamma^{\mu\nu} = l_{\mu}\gamma^{\mu\nu} = 0. \quad (5.4.2)$$

Здесь $\gamma_{\mu\nu}$ — метрический тензор 2-мерного пространственно-подобного локального сечения, ортогонального $\tau^{\mu} = g^{\mu}(0)$ и $l^{\mu} = g^{\mu}(1)$. В такой теории используются либо скаляры — тензорные величины, свернутые по всем индексам с векторами τ^{μ} и l^{μ} , либо 2-мерные тензоры, спроецированные на направления 2-мерной локальной поверхности посредством $-\gamma_{\mu}^{\nu}$.

Электромагнитное или иное излучение, распространяющееся со скоростью света, характеризуется изотропным волновым вектором k^{μ} . Времени-подобная часть этого вектора пропорциональна 4-скорости $u^{\mu} = \tau^{\mu}$ используемой системы отсчета. Пространственно-подобную часть $-h_{\nu}^{\mu}k^{\nu}$ используем для определения второго единичного вектора диады l^{μ} , ортогонального τ^{μ} так, что

$$k^{\mu} = (\tau^{\mu} \pm l^{\mu})\omega(x), \quad (5.4.3)$$

где $\omega(x)$ — частота излучения (скалярная функция). Очевидно, так определенный вектор изотропен. В данной интерпретации метрический тензор 2-мерного сечения $\gamma_{\xi\eta}$, ортогонального k^{μ} , характеризует фронт волнового процесса.

Возвращаясь к алгебраическим критериям гравитационных волн, отметим, что с собственными векторами характеристической матрицы (5.3.7) связаны векторы Дебеве k_{μ} , так названные по имени автора, установившего характерные соотношения (уравнения Дебеве) для этих векторов и компонент тензора Римана—Кристоффеля, позволяющие различать подтипы пространств. Приведем эти уравнения для подтипов, претендующих на волновой характер.

1) Уравнения Дебеве для подтипа III представляются в виде

$$k^{\mu}(R_{\alpha\beta\mu\nu}k_{\lambda} - R_{\alpha\beta\mu\lambda}k_{\nu}) = 0. \quad (5.4.4)$$

2) Уравнение для подтипа N принимает вид

$$k^{\alpha}R_{\alpha\beta\mu\nu} = 0, \quad (5.4.5)$$

позволивший трактовать это соотношение как условие ортогональности волнового вектора k^α компонентам напряженности свободной гравитационной волны.

- 3) Дебеве показал, что для пространств подтипов N и III имеют место соотношения:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} k^\alpha k^\mu = 0; \quad \overset{*}{R}_{\alpha\beta\mu\nu} k^\alpha k^\mu = 0. \quad (5.4.6)$$

Диадные физико-геометрические тензоры

Из диадных составляющих метрического тензора и их первых производных в самом общем случае можно построить 11 независимых диадных физико-геометрических тензоров. Выпишем их в общековариантном виде. Введем для них унифицированные обозначения, обозначая индексом 0 в скобках величины, возникающие из прежних монадных тензоров, а индексом 1 в скобках — соответствующие второму вектору диады. Семь тензоров получаются всевозможными проецированиями трех монадных физико-геометрических тензоров на направления l и γ :

$$\begin{aligned} a(0) &\equiv l^\mu a_\mu; & a(0)_\alpha &\equiv -\gamma_\alpha^\mu a_\mu; & \widehat{d}(0) &\equiv l^\mu l^\nu d_{\mu\nu}; & d(0)_{\alpha\beta} &\equiv \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu d_{\mu\nu}; \\ \omega(0)_{\alpha\beta} &\equiv \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu \omega_{\mu\nu}; & \omega(0)_\alpha &\equiv \gamma_\alpha^\mu l^\nu \omega_{\mu\nu}; & d(0)_\alpha &\equiv -\gamma_\alpha^\mu l^\nu d_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (5.4.7)$$

Три диадных физико-геометрических тензора получаются аналогично монадным заменой τ^μ и $h_{\mu\nu}$ на соответственно l^μ и $\gamma_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} a(1)_\alpha &\equiv -\gamma_\alpha^\mu l^\nu (l_{\mu,\nu} - l_{\nu,\mu}); & \omega(1)_{\alpha\beta} &\equiv \frac{\gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu (l_{\mu,\nu} - l_{\nu,\mu})}{2}; \\ d(1)_{\alpha\beta} &\equiv -\frac{\gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu (l_{\mu,\nu} + l_{\nu,\mu})}{2}. \end{aligned} \quad (5.4.8)$$

Наконец, одна векторная величина появляется из совместного рассмотрения двух векторных полей:

$$\omega(1)_\alpha = \frac{\gamma_\alpha^\mu \tau^\nu (l_{\mu,\nu} - l_{\nu,\mu})}{2}. \quad (5.4.9)$$

Итого, имеем: четыре тензора второго ранга, пять векторов и два скаляра.

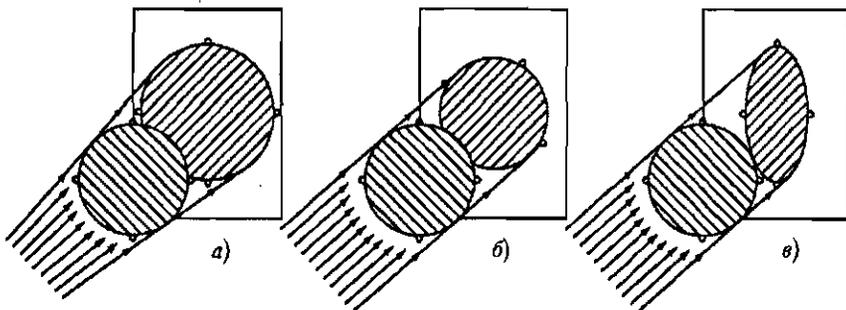


Рис. 5.4. Геометрический смысл трех оптических инвариантов

Характер конгруэнции изотропных линий можно описать с помощью трех оптических инвариантов:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{k_{;\mu}^{\mu}}{2}; & \Omega^2 &= \frac{(k_{\mu;\nu} - k_{\nu;\mu})k^{\mu;\nu}}{4}; \\ \sigma^2 &= \frac{(k_{\mu;\nu} + k_{\nu;\mu})k^{\mu;\nu}}{4} - \varepsilon^2, \end{aligned} \quad (5.4.10)$$

которые позволяют сопоставить контуры непрозрачного предмета с его тенью на экране, расположенном на некотором расстоянии dr за предметом (см. рис. 5.4).

Величина εdr характеризует растяжение или сжатие тени (рис. 5.4 а), Ωdr — поворот (рис. 5.4 б), а $|\sigma| dr$ — сдвиг (сплюснутость) тени (рис. 5.4 в).

Оптические инварианты легко записать через диадные физико-геометрические тензоры. Для этого учтем, что изотропные линии, к которым касателен волновой вектор k^{μ} , являются геодезическими, т. е. вектор k^{μ} удовлетворяет условию:

$$k^{\nu} k_{;\nu}^{\mu} = 0 \rightarrow (\tau^{\nu} \pm l^{\nu}) [\omega_{;\nu} (\tau^{\mu} \pm l^{\mu}) + \omega (\tau^{\mu} \pm l^{\mu})_{;\nu}] = 0. \quad (5.4.11)$$

Здесь и далее верхний знак соответствует выбору $k^{\mu} = (\tau^{\mu} + l^{\mu})\omega$, а нижний знак — аналогичному выражению со знаком минус. Проецируя это соотношение на направления τ , l , γ , получаем:

$$\widehat{d}(0) \mp a(0) + \frac{1}{\omega^2} \omega_{;\nu} k^{\nu} = 0; \quad (5.4.12)$$

$$a(0)_{\nu} + a(1)_{\nu} \mp 2(\omega(0)_{\nu} + \omega(1)_{\nu}) = 0. \quad (5.4.13)$$

Используя (5.4.12) и (5.4.13), оптические скаляры можно записать в виде

$$\epsilon = -\frac{\omega}{2}(d(0) \pm d(1)); \quad (5.4.14)$$

$$\Omega^2 = \frac{\omega^2}{2} [\omega(0)_{\mu\nu} \pm \omega(1)_{\mu\nu}] [\omega(0)^{\mu\nu} \pm \omega(1)^{\mu\nu}]; \quad (5.4.15)$$

$$\sigma^2 = \frac{\omega^2}{2} [d(0)_{\mu\nu} \pm d(1)_{\mu\nu}] [d(0)^{\mu\nu} \pm d(1)^{\mu\nu}] - \frac{\omega^2}{4} (d(0) \pm d(1))^2. \quad (5.4.16)$$

Эти формулы позволяют наделить физическим смыслом диадные физико-геометрические тензоры $\omega(1)_{\mu\nu}$, $d(1)_{\mu\nu}$ и $d(1)$.

Диадные операторы дифференцирования

В качестве основных диадных операторов (в общековариантном виде) выберем следующие три, которые при действии на γ -спроецированные тензоры дают опять γ -спроецированные тензоры:

- 1) диадный оператор временного дифференцирования

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_T \tilde{B}_{\nu \dots}^{\mu \dots} &= \Gamma_{\alpha \dots \nu \dots}^{\mu \dots \beta \dots} \mathcal{S}_{(\tau)} \tilde{B}_{\beta \dots}^{\alpha \dots} = \\ &= \tau^\lambda \frac{\partial \tilde{B}_{\nu \dots}^{\mu \dots}}{\partial x^\lambda} - \tilde{N}_\lambda^\mu \tilde{B}_{\nu \dots}^{\lambda \dots} - \dots + \tilde{N}_{\nu \dots}^\lambda \tilde{B}_{\lambda \dots}^{\mu \dots} + \dots, \end{aligned} \quad (5.4.17)$$

$$\text{где } \tilde{N}_\sigma^\lambda = \tau_\sigma^\lambda - \tau^\lambda a_\sigma - 2l^\lambda \omega(1)_\sigma - 2l_\sigma [d(0)^\lambda - \omega(1)^\lambda];$$

- 2) диадный оператор дифференцирования вдоль l

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_L \tilde{B}_{\nu \dots}^{\mu \dots} &= \Gamma_{\alpha \dots \nu \dots}^{\mu \dots \beta \dots} \mathcal{S}_{(l)} \tilde{B}_{\beta \dots}^{\alpha \dots} = \\ &= l^\lambda \frac{\partial \tilde{B}_{\nu \dots}^{\mu \dots}}{\partial x^\lambda} - \tilde{L}_\lambda^\mu \tilde{B}_{\nu \dots}^{\lambda \dots} - \dots + \tilde{L}_{\nu \dots}^\lambda \tilde{B}_{\lambda \dots}^{\mu \dots} + \dots, \end{aligned} \quad (5.4.18)$$

$$\text{где } \tilde{L}_\sigma^\lambda = l_\sigma^\lambda - l^\lambda a_\sigma - 2\tau^\lambda \omega(0)_\sigma - 2\tau_\sigma [d(0)^\lambda - \omega(1)^\lambda];$$

- 3) диадная ковариантная производная вдоль направлений γ (ковариантного 2-мерного дифференцирования):

$$\bar{\nabla}_\sigma \tilde{B}_{\nu \dots}^{\mu \dots} = -\gamma_\sigma^\lambda \Gamma_{\alpha \dots \nu \dots}^{\mu \dots \beta \dots} \nabla_\lambda \tilde{B}_{\beta \dots}^{\alpha \dots}. \quad (5.4.19)$$

Запись основных соотношений ОТО в диадном виде означает представление общековариантных величин и выражений исключительно через скаляры и γ -спроецированные тензоры, диадные

физико-геометрические тензоры и диадные операторы дифференцирования. В общем случае такие выражения имеют довольно громоздкий вид.

5.4.2. Кинеорометрическая калибровка диадного метода

Диадный метод целесообразно использовать в специальных групповых калибровках, аналогичных изложенным в главе 4 калибровкам монадного метода. Теперь их будет больше. Ограничимся случаями первичного выделения времени-подобного вектора τ^μ , тогда имеем четыре групповые калибровки диадного метода ³⁾.

1. Имея в виду применение диадного метода к описанию гравиинерциальных волновых процессов, здесь рассмотрим **кинеорометрическую калибровку** диады $\{\tau^\mu, l^\mu\}$, которая осуществляется в два этапа способом, аналогичным кинеметрической калибровке монады:

$$\tau_\mu = \frac{g_\mu^0}{\sqrt{g^{00}}} \rightarrow \tau^\mu = \frac{g^{0\mu}}{\sqrt{g^{00}}}; \quad (5.4.20)$$

$$l_\mu = \frac{{}^*h_\mu^1}{\sqrt{{}^*h^{11}}} = \left\{ \frac{g^{01}}{\sqrt{g^{00}(g^{01}g^{01} - g^{00}g^{11})}}; -\frac{\sqrt{g^{00}}}{\sqrt{g^{01}g^{01} - g^{00}g^{11}}}; 0; 0 \right\};$$

$$l^\mu = \frac{{}^*h^{\mu 1}}{\sqrt{{}^*h^{11}}} = \left\{ 0; \frac{\sqrt{g^{01}g^{00} - g^{00}g^{11}}}{\sqrt{g^{00}}}; \frac{g^{01}g^{02} - g^{12}g^{00}}{\sqrt{g^{00}(g^{01}g^{01} - g^{00}g^{11})}}; \frac{g^{01}g^{03} - g^{13}g^{00}}{\sqrt{g^{00}(g^{01}g^{01} - g^{00}g^{11})}} \right\}, \quad (5.4.21)$$

где ${}^*h^{\mu 1}$ — компоненты метрического тензора 3-мерного пространственного сечения в кинеметрической калибровке монады. Компо-

³⁾ Поскольку в главе 4 для них приняты греческие названия, предложенные А. Л. Зельмановым, то для обозначения новых методов приходится следовать этому же способу. Так, для обозначения калибровки пространственно-подобного направления, аналогичной хронометрической (термин, производный от греческого слова *χρονος* — время), примем термин *хориометрическая калибровка* (производный от греческого слова *χωριον* — место), а для калибровки, соответствующей кинеметрической — термин *орометрическая калибровка* (производный от греческого слова *οραω* — вижу).

ненты 2-мерного метрического тензора $\gamma_{\mu\nu}$ тогда находятся в виде

$$\gamma^{\xi\eta} = \frac{g^{0\xi}g^{0\eta} - g^{\xi\eta}g^{00}}{g^{00}} - \frac{(g^{01}g^{\xi 0} - g^{1\xi}g^{00})(g^{10}g^{\eta 0} - g^{1\eta}g^{00})}{g^{00}(g^{01}g^{01} - g^{00}g^{11})};$$

$$\gamma_{\xi\eta} = -g_{\xi\eta}; \quad \gamma_{\eta}^{\xi} = -g_{\eta}^{\xi}; \quad \gamma_{00} = -g_{00} - \frac{g^{11}}{g^{01}g^{01} - g^{00}g^{11}};$$

$$\gamma_{11} = -g_{11} - \frac{g^{00}}{g^{01}g^{01} - g^{00}g^{11}}; \quad \gamma_{01} = -g_{01} - \frac{g^{01}}{g^{01}g^{01} - g^{00}g^{11}}; \quad (5.4.22)$$

$$\gamma^{0\mu} = \gamma^{1\mu} = 0; \quad \gamma_{\mu}^0 = \gamma_{\mu}^1 = 0; \quad \gamma_0^{\xi} = \frac{g^{01}g^{1\xi} - g^{0\xi}g^{11}}{g^{01}g^{01} - g^{00}g^{11}};$$

$$\gamma_1^{\xi} = \frac{g^{01}g^{0\xi} - g^{1\xi}g^{00}}{g^{01}g^{01} - g^{00}g^{11}}.$$

Системы координат, в которых

$$\tau_i = \tau'_i = 0, \quad l_{\xi} = l'_{\xi} = 0,$$

связаны такими преобразованиями координат, что

$$\frac{\partial x^0}{\partial x'^i} = 0; \quad \frac{\partial x^1}{\partial x'^{\xi}} = 0.$$

Это приводит к выделению класса преобразований координат:

$$x'^0 = x'^0(x^0); \quad x'^1 = x'^1(x^0, x^1); \quad (5.4.23)$$

$$x'^{\xi} = x'^{\xi}(x^0, x^1, x^2, x^3). \quad (5.4.24)$$

Назовем кинорометрически-инвариантными (к. о. и.) 2-тензорами такие величины, которые инвариантны при преобразованиях (5.4.23) и ковариантны относительно преобразований (5.4.24). Такими свойствами обладают следующие комплексы, образованные из компонент произвольного тензора $B_{\alpha \dots}^{\mu \dots}$:

$$B_{\mu \dots \nu \dots \beta \dots}^{\alpha \dots} \tau^{\mu} \dots l^{\nu} \dots (-1)^{p+k} \gamma_{\alpha\eta} \dots \gamma_{\xi}^{\beta} \dots \rightarrow$$

$$\rightarrow B_{i_j \dots \xi \eta \dots}^{0 \dots 0} \frac{1}{(g^{00})^{m/2}} \frac{1}{(*h^{11})^{n/2}} h^{i1} h^{j1} \dots h^{s1}. \quad (5.4.25)$$

Таким образом, (к. о. и.) тензорами являются все τ - и l -спроецированные тензоры (скаляры), а также все контравариантные и только

с ковариантными индексами 2 и 3 γ -спроецированные тензоры. В такой калибровке достаточно использовать лишь (к. о. и.) величины.

II. В групповых калибровках диадные физико-геометрические тензоры записываются с индексами, принимающими лишь два значения (2 и 3). После подстановки в эти формулы выражений для диадных составляющих метрического тензора оказывается, что в *кинеорометрической калибровке* три из 11 физико-геометрических тензоров тождественно обращаются в нуль:

$$\omega(0)_\xi \equiv 0; \quad \omega(0)_{\xi\eta} \equiv 0; \quad \omega(1)_{\xi\eta} \equiv 0. \quad (5.4.26)$$

III. Диадные операторы в кинорометрической калибровке имеют вид:

1) оператор временного дифференцирования

$$**\partial_T \tilde{B}_{\eta \dots}^\xi = \tau^\lambda \frac{\partial \tilde{B}_{\eta \dots}^\xi}{\partial x^\lambda} - \tilde{N}_{\varphi}^\xi \tilde{B}_{\eta \dots}^{\varphi \dots} - \dots + \tilde{N}_{\eta}^{\varphi} \tilde{B}_{\varphi \dots}^\xi + \dots, \quad (5.4.27)$$

где $\tilde{N}_{\varphi}^\xi = \tau^\sigma \gamma_{\sigma, \varphi}^\xi$;

2) оператор дифференцирования вдоль l

$$**\partial_L \tilde{B}_{\eta \dots}^\xi = l^i \frac{\partial \tilde{B}_{\eta \dots}^\xi}{\partial x^i} - \tilde{L}_{\varphi}^\xi \tilde{B}_{\eta \dots}^{\varphi \dots} - \dots + \tilde{L}_{\eta}^{\varphi} \tilde{B}_{\varphi \dots}^\xi + \dots, \quad (5.4.28)$$

где $\tilde{L}_{\varphi}^\xi = l^\sigma \gamma_{\sigma, \varphi}^\xi$;

3) оператор ковариантного 2-мерного дифференцирования

$$**\nabla_\zeta \tilde{B}_{\eta \dots}^\xi = \frac{\partial \tilde{B}_{\eta \dots}^\xi}{\partial x^\zeta} + E_{\varphi \zeta}^\xi \tilde{B}_{\eta \dots}^{\varphi \dots} + \dots - E_{\eta \zeta}^\varphi \tilde{B}_{\varphi \dots}^\xi - \dots, \quad (5.4.29)$$

где использованы 2-мерные символы Кристоффеля

$$E_{\varphi \zeta}^\xi = \frac{\gamma^{\xi\psi}}{2} \left(\frac{\partial \gamma_{\varphi\psi}}{\partial x^\zeta} + \frac{\partial \gamma_{\zeta\psi}}{\partial x^\varphi} - \frac{\partial \gamma_{\zeta\varphi}}{\partial x^\psi} \right).$$

Для полноты картины здесь только назовем еще одну однородную — хронохориогеометрическую калибровку диады и еще две смешанные калибровки диадного метода: *кинехориогеометрическую*

и хроноорометрическую. В хронохориометрической калибровке оба вектора диады последовательно калибруются способом типа хронометрического. В кинехориометрической калибровке вектор τ^μ задается кинеметрическим способом, а затем вектор l^μ определяется хориометрическим образом. В хроноорометрической калибровке вектор τ^μ калибруется хронометрическим образом, а вектор l^μ затем калибруется способом, аналогичным кинеметрическому. Более подробно эти методы изложены в [1, 5].

Контрольные задания

1. Записать диадные составляющие метрического тензора в хронохориометрической калибровке.
2. Выписать выделенные преобразования координат в хронохориометрической калибровке.
3. Показать, что в хронохориометрической калибровке тождественно равен нулю лишь один из диадных физико-геометрических тензоров.
4. Выделение третьего ортонормированного вектора в 4-мерном пространстве-времени приводит к тетрадному методу, в котором метрический тензор представляется в виде

$$g_{\mu\nu} = g_\mu(\alpha)g_\nu(\alpha), \quad (5.4.30)$$

где введено единообразное обозначение $g_\mu(\alpha)$ для четырех векторов тетрады ($\alpha = 0, 1, 2, 3$), так что

$$g_\mu(0) = \tau_\mu; \quad g_\mu(1) = l_\mu; \quad \dots$$

Тетрадный метод, как и монадный или диадный, также удобно представить в виде 3 составных частей. Развить алгебру тетрадного метода.

5. В рамках алгебры тетрадного метода последовательно откалибровать компоненты тетрады методом типа хронометрического. Выписать выделенные группы преобразований в этой калибровке.

§ 5.5. Анализ волновых решений уравнений Эйнштейна

Применим изложенные выше критерии и методы для анализа как точных, так и приближенных (линеаризованных) волновых решений уравнений Эйнштейна.

5.5.1. Анализ точных волновых решений

Рассмотрим несколько точных решений⁴⁾ уравнений Эйнштейна, по тем или иным критериям относимых к волновым.

I. Объемные волны Бонди—Пиранни—Робинсона описываются метрикой (подтипа N):

$$ds^2 = (dx^0)^2 - ((dx^1)^2 + \alpha(dx^2)^2 + 2\beta dx^2 dx^3 + \gamma(dx^3)^2), \quad (5.5.1)$$

где α , β и γ — три функции от $u = x^0 - x^1$, удовлетворяющие уравнению

$$\lambda'' - \frac{1}{2}\lambda'(\ln \lambda)' - \alpha'\gamma' - (\beta')^2 = 0. \quad (5.5.2)$$

Здесь $\lambda = \alpha\gamma - \beta^2 > 0$, штрих означает дифференцирование по u .

Для этой метрики в кинеметрической калибровке выбирается диада $k^\mu = \tau^\mu = l^\mu$, где

$$\tau^\mu = \{1; 0; 0; 0\}; \quad l^\mu = \{0; 1; 0; 0\}; \quad \gamma_{\xi\eta} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}. \quad (5.5.3)$$

Диадные физико-геометрические тензоры находятся в виде:

$$\begin{aligned} a(0) = \widehat{d}(0) = 0; \quad a(0)_\xi = a(1)_\xi = q_\xi = \omega(1)_\xi = 0; \\ d(0)_{\xi\eta} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{\xi\eta}}{\partial x^0}; \quad d(1)_{\xi\eta} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{\xi\eta}}{\partial x^1}. \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

В данной системе отсчета вектор ускорения равен нулю, т. е. этой метрикой описывается *свободный гравитационно-инерциальный волновой процесс* (конгруэнция мировых линий системы отсчета является геодезической).

II. Метрика Такено (подтипа N) чаще всего приводится в виде

$$\begin{aligned} ds^2 = (P + S)(dx^0)^2 - 2S dx^0 dx^1 - (P - S)(dx^1)^2 - \alpha(dx^2)^2 - \\ - 2\beta dx^2 dx^3 - \gamma(dx^3)^2, \end{aligned} \quad (5.5.5)$$

⁴⁾ Изложению и анализу точных решений уравнений Эйнштейна посвящена специальная монография [6].

где α, β, γ, P и S — пять функций аргумента $u = x^0 - x^1$, на которые наложено прежнее условие (5.5.2) в тех же обозначениях.

В данном случае опять используем систему отсчета (и ориентаций) посредством кинеорометрической калибровки диады в используемой координатной системе. Тогда составляющие метрического тензора имеют вид:

$$\begin{aligned} \tau^\mu &= \left\{ \frac{\sqrt{P-S}}{P}; -\frac{S}{P\sqrt{P-S}}; 0; 0 \right\}; \\ l^\mu &= \left\{ 0; -\frac{S}{P\sqrt{P-S}}; 0; 0 \right\}. \end{aligned} \quad (5.5.6)$$

Составляющие 2-мерного метрического тензора по-прежнему определяются формулой (5.5.3).

Диадные физико-геометрические тензоры находятся в виде:

$$\begin{aligned} a(0) = \widehat{d}(0) &= \frac{-2SP' + PP' + PS'}{2P(P-S)^{3/2}}; \\ a(0)_\xi = a(1)_\xi = g_\xi = \omega(1)_\xi &= 0; \\ d(0)_{\xi\eta} = d(1)_{\xi\eta} &= \frac{\gamma'_{\xi\eta}}{2\sqrt{P-S}}. \end{aligned} \quad (5.5.7)$$

Вектор диады выбирается в виде $k^\mu = \tau^\mu + l^\mu$. Можно показать, что для этой метрики отличны от нуля лишь поперечно-поперечные компоненты тензора Римана—Кристоффеля. Данная метрика удовлетворяет как алгебраическому, так и референционному критериям. На основе диадного подхода в рассматриваемой системе отсчета метрику Такено можно интерпретировать как описывающую *продольно-несвободный гравитационно-инерциальный волновой процесс* (когда прохождение волны сопровождается ускорением системы отсчета в направлении распространения волны).

III. Метрику Розена также подтипа N можно записать в виде

$$ds^2 = e^{2\mu} [(dx^0)^2 - (dx^1)^2] - u^2 [e^{2\nu} (dx^2)^2 - e^{-2\nu} (x^3)^2], \quad (5.5.8)$$

где $\mu(u)$ и $\nu(u)$ — функции от $u = x^0 - x^1$, удовлетворяющие уравнению

$$2\mu' = u(\nu')^2. \quad (5.5.9)$$

IV. Интересным примером «волновой» метрики подтипа N является решение Переса:

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - 2\varphi(dx^0 + dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2, \quad (5.5.10)$$

где функция $\varphi(x^0, x^1, x^2, x^3)$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2 \partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^3 \partial x^3} = 0. \quad (5.5.11)$$

Следует отметить, что функция φ в самом общем случае может не зависеть от x^0 , т. е. метрика Переса может служить примером метрики подтипа N , не являющейся волновой. Это аналогично ситуации в электродинамике, когда скрещенные статические однородные электрическое и магнитное поля характеризуются равными нулю инвариантами, т. е. формально удовлетворяющими алгебраическим свойствам электромагнитной волны.

V. Цилиндрические волны Эйнштейна—Розена, в противоположность предыдущему случаю, не удовлетворяют ни одному волновому алгебраическому критерию, однако есть достаточно оснований считать эту метрику волновой. Решение Эйнштейна—Розена определяется метрикой (в цилиндрических координатах r, z, φ)

$$ds^2 = [(dx^0)^2 - dr^2]e^{2\gamma-2\psi} - dz^2 e^{2\psi} - r^2 d\varphi^2 e^{-2\psi}, \quad (5.5.12)$$

где γ и ψ — две функции x^0 и r , удовлетворяющие следующим уравнениям:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^{0^2}} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = 0; \quad (5.5.13)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial r} = r \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x^0} \right)^2 \right]; \quad \frac{\partial \gamma}{\partial x^0} = 2r \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial x^0}.$$

Отсюда видно, что уравнение для ψ (5.5.13) является хорошо известным линейным волновым уравнением в цилиндрических координатах. Его решение легко можно записать через цилиндрические функции; подставляя это решение в (5.5.14), нетрудно отыскать соответствующую функцию γ .

Для цилиндрических волн Эйнштейна—Розена рассмотрим откалиброванную кинеметрическим способом диаду. Это означает

$$\tau^\mu = \{e^{\psi-\gamma}; 0; 0; 0\}; \quad l^\mu = \{0; e^{\psi-\gamma}; 0; 0\};$$

$$\gamma_{\xi\eta} = \begin{pmatrix} \rho^2 e^{-2\psi} & 0 \\ 0 & e^{2\psi} \end{pmatrix}. \quad (5.5.14)$$

Тогда для диадных физико-геометрических тензоров имеем:

$$a(0)_\xi = a(1)_\xi = \omega(0)_\xi = \omega(1)_\xi = 0; \quad \widehat{a}(0) = e^{\psi-\gamma}(\psi' - \gamma');$$

$$\widehat{d}(0) = e^{\psi-\gamma}(\dot{\gamma} - \dot{\gamma}); \quad d(0)_{\xi\eta} = \begin{pmatrix} -\rho^2 \dot{\psi} e^{-\psi-\gamma} & 0 \\ 0 & \dot{\psi} e^{3\psi-\gamma} \end{pmatrix}; \quad (5.5.15)$$

$$d(1)_{\xi\eta} = \begin{pmatrix} -\rho e^{-\psi-\gamma}(1 - \rho\psi') & 0 \\ 0 & \psi' e^{3\psi-\gamma} \end{pmatrix},$$

где точка означает дифференцирование по x^0 , а штрих — дифференцирование по τ . Волновой вектор выбирается в виде

$$k^\mu = e^{\psi-\gamma}(\tau^\mu \pm l^\mu).$$

Вследствие линейности (5.5.13) здесь можно одновременно рассматривать расходящуюся и сходящуюся волны. Нетрудно показать, что данная метрика удовлетворяет референционному критерию, однако не удовлетворяет ни одному из предлагавшихся алгебраических критериев. Таким образом, метрикой Эйнштейна—Розена описывается продольно-несвободный грави-инерциальный процесс.

5.5.2. Слабые плоские гравитационные волны

В этом подходе трудности, связанные с нелинейностями, отпадают. По-существу, теория сводится к описанию линейных волн тензорного поля второго ранга на фоне плоского пространства-времени. От геометрической парадигмы остается лишь ранг 2 рассматриваемого тензорного поля. На основе этой теории производятся оценки ожидаемых эффектов с участием гравитационных волн в такой трактовке (см., например, [7]). Изложим ключевые положения теории слабых гравитационных волн.

I. В линеаризованной теории гравитации полагается, что компоненты метрического тензора слабо отличаются от метрики пространства-времени Минковского (в декартовых координатах), т. е. представляются в виде

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu}, \quad \text{где } \varphi_{\mu\nu} \ll 1. \quad (5.5.16)$$

Далее во всех геометрических выражениях отбрасываются слагаемые, приводящие к нелинейностям и фактически строится теория свободного тензорного поля $\varphi_{\mu\nu}$. Так, линеаризуя уравнение Эйнштейна (в вакууме) $R_{\mu\nu} = 0$, приходим к уравнению

$$\square\varphi_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}\square\varphi}{2} = 0, \quad (5.5.17)$$

где $\varphi \equiv \eta^{\alpha\beta}\varphi_{\alpha\beta}$.

II. Гармонические координатные условия в линейном приближении принимают вид

$$\frac{\partial\varphi^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial\varphi_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0. \quad (5.5.18)$$

Поскольку в этой теории индексы поднимаются и опускаются метрическим тензором пространства-времени Минковского, все индексы можно писать снизу. Условия (5.5.19) соответствуют условиям Лоренца в электродинамике.

III. Легко показать, что 4 условия (5.5.19) допускают еще возможность координатных преобразований

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \phi^{\mu}(x); \quad x^{\mu} = x'^{\mu} - \phi^{\mu}(x'), \quad (5.5.19)$$

где $\phi^{\mu}(x)$ — малые по сравнению с единицей функции координат, удовлетворяющие волновому уравнению

$$\square\phi^{\mu} = 0. \quad (5.5.20)$$

IV. Пусть нас интересует гравитационная волна, распространяющаяся вдоль направления x^1 . С помощью 4 гармонических координатных условий (5.5.19) и выбором 4 функций ϕ^{μ} в (5.5.20) можно добиться обращения в нуль 8 компонент $\varphi_{\mu\nu}$. Прежде всего, устраняется след

$\varphi = \eta^{\alpha\beta} \varphi_{\alpha\beta} = 0$. Далее, полагая, что все компоненты $\varphi_{\mu\nu}$ имеют волновой характер, т. е. зависят от комбинации координат $(x^0 \pm x^1)$, устраним продольные, продольно-поперечные и с индексом 0 компоненты:

$$\varphi_{11} = \varphi_{12} = \varphi_{13} = \varphi_{00} = \varphi_{01} = \varphi_{02} = \varphi_{03} = (\varphi_{22} + \varphi_{33}) = 0. \quad (5.5.21)$$

Отличными от нуля остаются лишь две поперечно-поперечные компоненты φ_{23} и $(\varphi_{22} - \varphi_{33})$ (динамические переменные).

V. Переобозначая две функции: $\varphi_{23} = \beta$, $\varphi_{22} = -\varphi_{33} = \alpha$, находим, что в линейном приближении плоскому гравитационному волновому процессу соответствует метрика

$$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - (1 + \alpha) dx_2^2 - (1 - \alpha) dx_3^2 - 2\beta dx_2 dx_3. \quad (5.5.22)$$

VI. Можно показать, что метрика (5.5.23), соответствующая слабой гравитационной волне, удовлетворяет волновым критериям как в алгебраическом, так и в референционном подходах. Действительно, волновой вектор k^μ , соответствующий данной волне, например, в кинеметрической калибровке в рассматриваемом приближении является ковариантно постоянным, т. е. можно сказать, что метрика (5.5.23) принадлежит подтипу N по классификации Петрова и, следовательно, удовлетворяет алгебраическому критерию гравитационных волн Лихнеровича.

Отличные от нуля компоненты тензора Римана—Кристоффеля в данном приближении

$$X_{\xi\eta} = -Y_{\xi\eta} = \partial_T \bar{d}_{\xi\eta} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi_{\xi\eta}}{\partial x_0^2} \quad (5.5.23)$$

удовлетворяют референционному критерию гравитационных волн, если функции α и β нетривиально удовлетворяют волновым уравнениям.

Контрольные задания

1. Записать диадные составляющие и физико-геометрические тензоры для метрики Розена (5.5.8).
2. Записать диадные составляющие и физико-геометрические тензоры для метрики Переса (5.5.10).

§ 5.6. Воздействие грави-инерциальных волн на объекты

Так или иначе охарактеризованное гравитационное излучение (или грави-инерциальный волновой процесс) обладает качественно иными свойствами по сравнению с электромагнитными волнами. Поскольку электромагнитные волны воздействуют лишь на электрически заряженные тела, их можно обнаружить, сравнивая поведение заряженных объектов с нейтральными. В случае гравитационных волн подобное сравнение исключено. Теперь мы имеем дело с искривлением самого пространства-времени, что означает одинаковые возмущения (смещения) в данном месте всех объектов. Ищутся специальные приемы, которые позволили бы заметить проявления таких универсальных воздействий.

Отдельно рассмотрим случаи поведения свободных пробных масс и твердотельных детекторов при прохождении грави-инерциальных волн.

5.6.1. Поведение свободных пробных масс в слабой плоской грави-инерциальной волне

Пусть пробные массы таковы, что можно выбрать сопутствующую им синхронную систему отсчета (т. е. без вращения и ускорения), и, кроме того, пусть τ^μ и направление распространения волны l^μ находятся в кинеметрической (хронометрической) калибровке из метрики (5.5.23), в которой

$$\alpha = A \sin \left(\frac{\omega}{c} (x^0 - x^1) \right); \quad \beta = B \sin \left(\frac{\omega}{c} (x^0 - x^1) \right); \quad (5.6.1)$$

$A \ll 1$; $B \ll 1$. Тогда, определяя τ^μ и l^μ , можно сказать, что волновой процесс распространяется вдоль x^1 .

Возьмем точки-приборы, которые до прихода волны (при $A = 0$, $B = 0$) находились на одном расстоянии δr_0 от какой-то выделенной точки O . Эти точки лежат на сфере радиуса δr_0 :

$$\delta x_1^2 + \delta x_2^2 + \delta x_3^2 = \delta r_0^2.$$

Здесь и далее, чтобы не путать степени с индексами, последние будем писать снизу. Когда волновой процесс достигает системы,

расстояние между близкими точками задается формулой

$$\delta r = \sqrt{\delta x_1^2 + \delta x_2^2 + \delta x_3^2 + \alpha(\delta x_2^2 - \delta x_3^2) + 2\beta\delta x_2\delta x_3}. \quad (5.6.2)$$

Характерно, что по определению данной калибровки пространственные координаты каждой точки-прибора неизменны, приборы «вморожены» в координатную сетку.

Отдельно рассмотрим поведение свободных пробных масс для процессов двух типов.

1. Пусть $\alpha \neq 0, \beta = 0$, тогда

$$\delta r = \sqrt{\delta x_1^2 + \delta x_2^2 + \delta x_3^2 + \alpha(\delta x_2^2 - \delta x_3^2)}. \quad (5.6.3)$$

В координатном пространстве поверхность $\delta r = \delta r_0 = \text{const}$ является эллипсоидом:

$$\frac{\delta x_1^2}{\delta r_0^2} + \frac{\delta x_2^2}{\delta r_0^2}(1 + \alpha) + \frac{\delta x_3^2}{\delta r_0^2}(1 - \alpha) = 1 \quad (5.6.4)$$

с полуосями $\delta r_0, \delta r_0/\sqrt{1 + \alpha}, \delta r_0/\sqrt{1 - \alpha}$. В сечении $x_1 = \text{const}$ получим эллипс. Аналогично, окружность с координатным радиусом r_0 превратится в обратный эллипс. На рис. 5.5 изображены в координатах плоской 2-мерной поверхности (x^2, x^3) точки, попадающие на эллипс:

$$\frac{\delta x_2^2}{\delta r_0^2}(1 + \alpha) + \frac{\delta x_3^2}{\delta r_0^2}(1 - \alpha) = 1 \quad (5.6.5)$$

в течение периода волны.

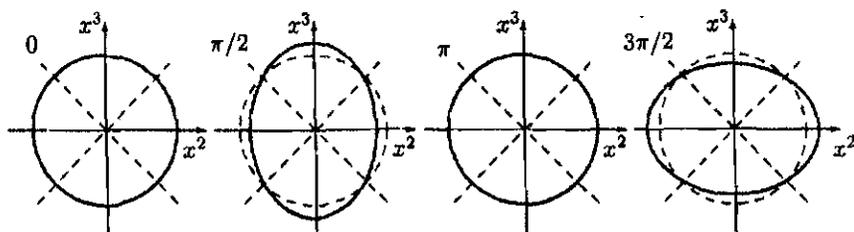


Рис. 5.5. Поведение свободных пробных частиц в метрике слабой плоской гравитационно-инерциальной волны ($\alpha \neq 0, \beta = 0$)

Примечательно, что есть два направления $\delta x_2 = \pm \delta x_3$, вдоль которых расстояния не меняются.

2. Пусть $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$, тогда

$$\delta r = \sqrt{\delta x_1^2 + \delta x_2^2 + \delta x_3^2 + 2\beta \delta x_2 \delta x_3}. \quad (5.6.6)$$

Опять поверхность $\delta r = \delta r_0 = \text{const}$ образует эллипсоид. Сечение эллипсоида $\delta x_1 = 0$ представляет собой эллипс:

$$\frac{\delta x_2^2}{\delta r_0^2} + \frac{\delta x_3^2}{\delta r_0^2} + 2\beta \frac{\delta x_2 \delta x_3}{\delta r_0^2} = 1, \quad (5.6.7)$$

который поворотом координат на угол $\theta = 45^\circ$ можно привести к канонической форме

$$\frac{\delta y_2^2}{\delta r_0^2} (1 + \beta) + \frac{\delta y_1^2}{\delta r_0^2} (1 - \beta) = 1. \quad (5.6.8)$$

За период волны на этот эллипс попадают точки, изображенные на рис. 5.6. Опять имеются два направления $\delta y_2 = \pm \delta y_3$, вдоль которых расстояния не меняются.

Рассмотренные два случая соответствуют двум возможным поляризациям свободного плоского грави-инерциального процесса. Таким образом, *две поляризации плоской свободной грави-инерциальной волны соответствуют периодическим растяжениям и сжатиям 2-мерной поверхности одинаковой фазы вдоль пар взаимно перпендикулярных направлений, повернутых относительно друг друга на 45° .*

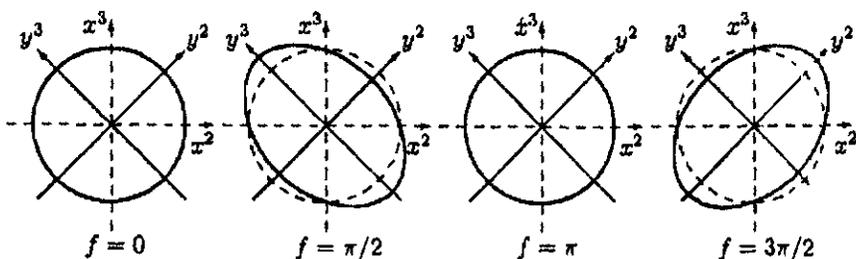


Рис. 5.6. Поведение свободных пробных частиц в метрике слабой плоской грави-инерциальной волны ($\alpha = 0$, $\beta \neq 0$)

Направления максимальных удлинений (сокращений) одной поляризации соответствуют несмещающимся точкам другой поляризации и наоборот.

5.6.2. Воздействие гравитационных волн на детектор

Постановка задачи

Рассмотрим несвободные пробные частицы, моделирующие в упрощенном виде твердотельные детекторы гравитационного излучения. Пусть на линейный осциллятор, который состоит из двух одинаковых частиц массой m_0 , соединенных пружиной жесткости k и длиной $2r_0$ в ненапряженном состоянии и ориентированных вдоль направления x^2 (см. рис. 5.7), падает вдоль x^1 плоско поляризованная волна, описываемая метрикой

$$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - (1 - \alpha)dx_2^2 - (1 - \alpha)dx_3^2, \quad (5.6.9)$$

где $\alpha = A \sin [(\omega/c)(x^0 - x^1)]$; $A \ll 1$.

Здесь для простоты оставлена лишь одна поляризация. Систему отсчета будем задавать хронометрической калибровкой. Пространственные уравнения мировых линий масс записываются в данной калибровке следующим образом:

$$\frac{dp^i}{d\tau} = L_{sk}^i p^s v^k + m a^i + 2p^k (\omega_{ik}^i - d_k^i) + \tilde{F}^i, \quad (5.6.10)$$

где \tilde{F}^i — негравитационные силы, т. е. силы напряжения пружины \mathcal{F}^i и диссипативные силы. Нам понадобится только компонента уравнения вдоль x^2 .

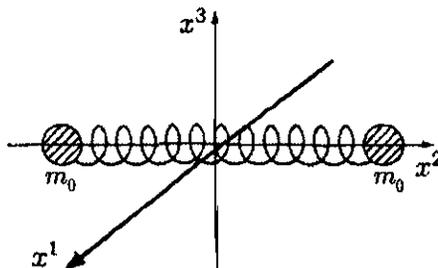


Рис. 5.7. Осциллятор из двух связанных пружиной масс

Сила напряжения пружины (вдоль x^2) \mathcal{F}_2 пропорциональна ее жесткости и абсолютному удлинению (индексы опять будем писать снизу)

$$\mathcal{F}_2 = -k(\sqrt{\delta l^2} - 2r_0), \quad (5.6.11)$$

где $\delta l^2 = -h_{ik}\delta x^i\delta x^k$ — квадрат длины пружины (δx^i — разность координат ее концов).

Качественный анализ процесса

Для данного процесса можно указать три пары характерных мировых линий (рис. 5.8).

Тонкие непрерывные линии соответствуют мировым линиям масс в отсутствие пружины (геодезические). Пунктирные линии изображают негеодезические мировые линии равновесия пружины. Расстояние между ними всегда равно $2r_0$. Жирными линиями показаны истинные мировые линии масс, связанных пружиной. В данной задаче имеются два положения равновесия: ненапряженное положение пружины и геодезические линии. Отклонения масс от них характеризуются соответственно величинами ξ и ζ .

Рассмотрим поведение масс относительно трех систем отсчета, конгруэнциям которых принадлежат три пары указанных мировых линий. При этом ограничимся рассмотрением одной лишь правой частицы. Кроме того, предположим, что до прихода гравитацион-

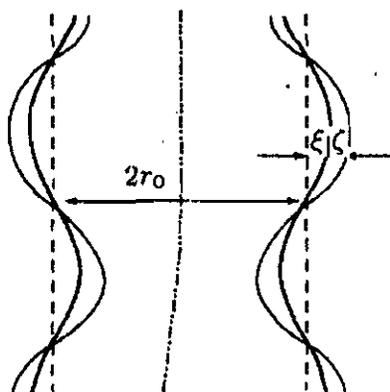


Рис. 5.8. Поведение осциллятора из двух связанных пружиной масс в метрике слабой плоской грави-инерциальной волны

ной волны частица покоилась и пружина была в ненапряженном состоянии. Тогда скорости, приобретаемые массами, и смещения будут иметь порядок амплитуды падающей волны.

I. Синхронная система отсчета ($\omega_{ik} = 0$, $a_i = 0$). Конгруэнции этой системы отсчета принадлежат тонкие и центральная штрихпунктирная линии. Очевидно, что система координат, в которой записана метрика (5.6.9), является хронометрической для синхронной системы отсчета. Координата правой массы определяется выражением $\delta x_2 = r_0 + \zeta$. Пренебрежем величинами $L_{sk}^i p^s v^k$ и $2p^k d_k^i$ (третьего и второго порядков малости). Уравнение (5.6.10) тогда приобретает вид:

$$m_0 \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = \bar{\mathcal{F}}_2. \quad (5.6.12)$$

Из-за малости скоростей здесь и в дальнейшем пренебрегаем членами порядка $(v/c)^2$. Компонента \mathcal{F}_2 силы напряжения пружины запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2 &= -2k \left(\sqrt{h_{22} \delta x_2^2} - r_0 \right) = -2k \left(\sqrt{(1 + \alpha)(r_0 + \zeta)^2} - r_0 \right) \simeq \\ &\simeq -2k \left(\frac{\alpha r_0}{2} - \zeta \right). \end{aligned} \quad (5.6.13)$$

Подставляя это выражение в (5.6.12) и вводя диссипативную силу, получаем:

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} + \frac{2k}{m_0} \zeta + \frac{\lambda}{m_0} \frac{d\zeta}{dt} = -\frac{k}{m_0} \alpha r_0. \quad (5.6.14)$$

Если возле массы осциллятора (или торца цилиндра Вебера) подвесить покоящуюся до прихода волны пробную массу на длинной нити (или поместить рядом на борту спутника), то ζ будет определяться относительным смещением пробной и связанной масс (или массы и торца цилиндра Вебера).

II. Сопутствующая массам система отсчета. Координаты рассматриваемых масс в этой системе отсчета неизменны. Тогда $v^i = p^i = 0$, а уравнения (5.6.10) существенно упрощаются:

$$-m a_2 = \bar{\mathcal{F}}_2 \quad (5.6.15)$$

и имеют смысл равенства силы инерции силе напряжения пружины. Рассматриваемому случаю соответствует хронометрическая система координат, получающаяся из исходной, в которой записано (5.6.9), преобразованиями:

$$x'^0 = x^0; \quad x'^1 = x^1; \quad x'^2 = x^2(1 + \eta(x^0)); \quad x'^3 = x^3, \quad (5.6.16)$$

где $\eta(x^0) \ll 1$ и имеет порядок малости амплитуды падающей волны. В этой системе координат с точностью до величин первого порядка малости имеем:

$$g'_{00} = 1; \quad g'_{02} \simeq x_2 \dot{\eta}; \quad g'_{22} = -(1 + \alpha - 2\eta) = -h'_{22}. \quad (5.6.17)$$

Здесь и далее точка означает дифференцирование по времени выбранной системы отсчета. Подставляя последние соотношения в выражение для ускорения системы отсчета, получаем в точке нахождения массы

$$a_2 = g_{02,0} r_0 \dot{\eta}. \quad (5.6.18)$$

Силу напряжения пружины находим в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2 &= -2k \left(\sqrt{h'_{22} \delta x_2'^2} - r_0 \right) = -2kr_0 \left(\sqrt{1 + \alpha - 2\eta} - 1 \right) \simeq \\ &\simeq -2kr_0 \left(\frac{\alpha}{2} - \eta \right). \end{aligned} \quad (5.6.19)$$

Подставляя два последних выражения в (5.6.15), получаем уравнение колебаний:

$$\frac{d^2}{dt^2}(r_0 \eta) + \frac{2k}{m_0}(r_0 \eta) + \frac{\lambda'}{m_0} \frac{d}{dt}(r_0 \eta) = \frac{k}{m_0} \alpha r_0. \quad (5.6.20)$$

Здесь опять введена диссипативная сила. Это уравнение совпадает с (5.6.14), если $\zeta = -r_0 \eta$.

III. Система отсчета ненапряженной пружины. Пусть ее конгруэнции принадлежат пунктирные линии и средняя мировая линия (на рисунке штрих-пунктирная). Остальные линии определяются из условия $h'_{ik} x'^i x'^k = \text{const}$. В хронометрической системе координат этой системы отсчета пространственные координаты x'^i мировых линий постоянны. Учитывая указанные условия, находим

преобразования от исходной координатной системы, в которой записана метрика (5.6.9), в хронометрическую систему координат данной системы отсчета:

$$x'^0 = x^0; \quad x'^1 = x^1; \quad x'^2 = x^2 \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right); \quad x'^3 = x^3, \quad (5.6.21)$$

Искомая метрика имеет вид:

$$ds^2 = dx_0^2 - x_2 \dot{\alpha} dx_0 dx_2 - dx_1^2 - dx_2^2 - x_2 \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} dx_1 dx_2 - (1 + \alpha) dx_3^2, \quad (5.6.22)$$

Координаты массы $\delta x_2 = r_0 + \xi$, где ξ — малая величина порядка α . Сила напряжения пружины определяется выражением

$$F_2 = -2k \left(\sqrt{-g_{22}(r_0 + \xi)^2} - r_0 \right) \simeq -2k\xi. \quad (5.6.23)$$

Оставляя в уравнении движения только величины первого порядка малости, получаем:

$$m_0 \ddot{\xi} = m_0 a_2 - 2k\xi. \quad (5.6.24)$$

Учитывая, что в данной системе отсчета

$$\tau_2 = \frac{g_{02}}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{\dot{\alpha}}{2} x_2; \quad a_2 \simeq -\frac{x_2}{2} \ddot{\alpha}, \quad (5.6.25)$$

и вводя диссипативную силу, находим уравнение колебаний

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \frac{2k}{m_0} \xi + \frac{\lambda''}{m_0} \frac{d\xi}{dt} = -\frac{\omega^2}{2} \alpha r_0. \quad (5.6.26)$$

Обсуждение результатов

• В использованном приближении упругие силы пружины во всех трех системах отсчета одинаковы, откуда следует, что

$$\xi = r_0 \left(\frac{\alpha}{2} - \eta \right) = \frac{\alpha}{2} r_0 + \zeta. \quad (5.6.27)$$

Подставив в уравнение (5.6.26) вместо ξ величину $r_0(\alpha/2 - \eta)$, получаем уравнение (5.6.20). Таким образом, уравнения (5.6.26) и (5.6.20) описывают колебания одной и той же мировой линии несвобод-

ной массы относительно двух положений равновесия: для пружины и геодезической. При резонансе, когда $\omega = \sqrt{2k/m_0}$, эти уравнения совпадают. При отсутствии гравитационной волны положения равновесия тождественны и уравнения совпадают. В отсутствие пружины уравнения (5.6.14) и (5.6.20) тривиальны, а уравнение (5.6.26) описывает колебания свободных масс.

• Отметим, что в проведенных рассуждениях нигде не использовались понятия псевдотензора энергии-импульса или вектора энергии гравитационной волны, а присутствовали лишь характеристики, присущие геометрической парадигме.

Литература по проблемам воздействия гравитационных волн на приборы:

1. Вебер Дж. Общая теория относительности и гравитационные волны. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962.
2. Захаров В. Д. Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна. М.: Наука, 1972.
3. Брагинский В. Б., Манукин А. Б. Измерение малых сил в физических экспериментах. М.: Наука, 1974.
4. Бичак И., Руденко В. Н. Гравитационные волны в ОТО и проблема их обнаружения. М.: Изд-во МГУ, 1987.

§ 5.7. Формулировки ОТО в монадном виде

В 1960–1970-х годах предпринимался поиск наиболее подходящей формулировки классической теории гравитации для решения проблемы квантования гравитации или, другими словами, проблемы совмещения принципов общей теории относительности и квантовой теории. В итоге был развит ряд эквивалентных формулировок, которые различаются по двум признакам: (I) по типу используемого формализма и (II) по выбору исходных независимых переменных.

I. Следует различать следующие типы формализмов:

- геометрический подход, используемый здесь;
- лагранжев формализм, традиционно используемый в теории поля;
- (несимметричный) гамильтонов формализм общей теории относительности, предложенный П. Дираком и рядом других авторов;

- симметричный гамильтонов формализм В. С. Брженева;
 - формализм Гамильтона—Якоби.
- Имеются и другие формализмы.

II. В качестве исходных гравитационных переменных можно выбирать следующие:

- 10 компонент метрического тензора $g_{\mu\nu}$;
- 4 компоненты монады τ^μ и 6 компонент 3-мерного метрического тензора h^{ik} ;
- компоненты диады τ^μ , l^i , $\gamma^{\xi\eta}$;
- 16 компонент тетрады $g^\mu(\alpha)$;
- 10 компонент метрического тензора и 40 компонент символов Кристоффеля (формализм Палатини);
- компоненты тензора Римана—Кристоффеля.

Можно назвать и другие варианты выбора исходных переменных. (Более подробно см. в [5, 8].)

Характерно то, что практически для всех наборов исходных переменных можно развить перечисленные выше формализмы, так что в литературе было представлено несколько десятков эквивалентных формулировок одной и той же классической теории гравитации. Их можно наглядно представить в виде ячеек 2-мерной таблицы, где по вертикали можно расположить виды формализмов, а по горизонтали — выбор исходных переменных.

Сосредоточимся здесь на колонке, соответствующей монадным составляющим метрического тензора τ^μ и h^{ik} . При этом следует обратить внимание на то, что наиболее плодотворной оказывается кинеметрическая калибровка монады, т. е. запись различных формализмов именно в нормальных (привилегированных) системах отсчета.

5.7.1. Лагранжев формализм ОТО

Отметим, что в «Теории поля» Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [7] и в других книгах и учебниках используется именно лагранжева формулировка ОТО. Авторы идут не по геометрическому пути (вслед за Эйнштейном), где уравнения Эйнштейна постулируются, а вслед за Гильбертом, постулируя вид гравитационного лагранжиана.

I. Для получения стандартных уравнений Эйнштейна в качестве лагранжиана следует выбрать плотность скалярной кривизны:

$$\tilde{\mathcal{L}}_{(gr)} = -\frac{\sqrt{-g}}{2\alpha c} {}^4R. \quad (5.7.1)$$

Чаще всего в качестве основных переменных выбираются компоненты метрического тензора.

Поскольку скалярная кривизна содержит вторые производные от метрического тензора, то для получения уравнений Эйнштейна, являющихся дифференциальными уравнениями второго порядка, к плотности лагранжиана (4.5.1) добавляются дивергентные слагаемые, позволяющие исключить члены со вторыми производными. В итоге получается плотность гравитационного лагранжиана в следующем виде:

$$\tilde{\mathcal{L}}_{(gr)} = \frac{\sqrt{-g}}{2\alpha c} g^{\mu\nu} (\Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\lambda}^{\lambda}). \quad (5.7.2)$$

Применяя к этому лагранжиану оператор Эйлера—Лагранжа, приходим к ранее записанным уравнениям Эйнштейна (в вакууме) в метрической формулировке.

II. Когда в качестве исходных переменных выбираются компоненты монады и 3-мерного метрического тензора (в кинеметрической калибровке) плотность гравитационного лагранжиана (5.7.1) представляется в следующем монадном виде

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_{(gr)} = \frac{\sqrt{-g}}{2\alpha c} {}^4R = \frac{\tau_0 \sqrt{\hbar}}{2\alpha c} (2 {}^* \partial_T d - (d^2 + d_{ik} d^{ik}) + \\ + 2({}^* \nabla_k a^k - a_k a^k) + {}^3R), \end{aligned} \quad (5.7.3)$$

где, напомним, отсутствует тензор угловой скорости вращения системы отсчета. Кроме того, здесь и в дальнейшем будем опускать значки у физико-геометрических тензоров, указывающие на кинеметрическую калибровку.

В выписанном выражении присутствуют слагаемые со вторыми производными. Избавимся от части из них. Для этого добавим к (5.7.3) дивергентные члены вида:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{-g}(a_k a^k - {}^* \nabla_k a^k) &= -2(\sqrt{-g} a^\lambda)_{,\lambda}; \\ 2\sqrt{-g}(d^2 - {}^* \partial_T d) &= -2(\tau^\lambda \sqrt{-g} d)_{,\lambda}. \end{aligned} \quad (5.7.4)$$

В результате получим плотность гравитационного лагранжиана (с точностью до постоянного размерного коэффициента)

$$\tilde{\mathcal{L}}_{(gr)} = \frac{\tau_0 \sqrt{\hbar}}{2\pi c} (d^2 - d_{ik} d^{ik} + {}^3R). \quad (5.7.5)$$

Варьирование этого лагранжиана по τ^μ приводит к скалярному и векторному уравнениям Эйнштейна (4.4.14) и (4.4.15), а варьирование по компонентам h^{ik} приводит к 6 пространственно спроецированным уравнениям Эйнштейна (4.4.16).

5.7.2. Гамильтонова формулировка ОТО

В целях подготовки общей теории относительности для квантования (для выделения динамических степеней свободы) была разработана гамильтонова формулировка общей теории относительности. В ее развитие большой вклад внесли П. Дирак, Р. Арновитт, С. Дезер, Ч. Мизнер [8] и ряд других авторов. Интересно взглянуть на содержание этого цикла работ с позиций монадного метода задания систем отсчета в кинематической калибровке. Поскольку названные авторы не владели идеологией и математическим аппаратом теории систем отсчета, здесь изложим гамильтонову формулировку теории гравитации с существенными для этой программы коррективами.

I. Поскольку в названных работах в качестве исходных выбирались 4 компоненты τ^μ и 6 компонент контравариантного 3-мерного метрического тензора h^{ik} , то из (5.7.5) сразу же видно, что в плотности гравитационного лагранжиана отсутствуют обобщенные скорости, соответствующие обобщенным «координатам» τ^μ . Дирак разработал формализм исключения этих переменных из числа динамических степеней свободы, а соответствующие им 4 уравнения Эйнштейна назвал уравнениями связи.

В монадном подходе компоненты τ^μ следует рассматривать не как обобщенные гравитационные «координаты», а как обобщенные скорости движения системы отсчета, тогда в качестве обобщенных координат должны выступать пространственно-временные координаты x^μ . Эти координаты можно понимать как набор из четырех скаляров. При изменении системы координат они просто заменяются на новые скаляры. В такой трактовке τ^μ нужно пред-

ставлять как спроектированные на τ производные от координат (производные Ли):

$$\mathcal{L}_{(\tau)}x^\mu = \tau^\nu x^\mu_{,\nu} = \tau^\nu \delta_\nu^\mu = \tau^\mu, \quad (5.7.6)$$

а параметром эволюции следует считать интервал $s \equiv \tau$ вдоль мировых линий системы отсчета.

II. Обобщенные импульсы, сопряженные x^μ , находятся обычным образом:

$$P_\mu = \frac{\delta \tilde{\mathcal{L}}_{(gr)}}{\delta \tau^\mu} = 2\tau_0 \sqrt{\hbar} \left({}^4R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} {}^4R \right) \tau^\nu. \quad (5.7.7)$$

Это выражение можно трактовать следующим образом. Поскольку в (5.7.5) отсутствуют $\tau^\mu_{,0}$, то $\delta \tilde{\mathcal{L}}_{(gr)}/\delta \tau^\mu$ можно представить как действие оператора Эйлера—Лагранжа на плотность гравитационного лагранжиана:

$$\frac{\delta \tilde{\mathcal{L}}_{(gr)}}{\delta \tau^\mu} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}_{(gr)}}{\partial \tau^\mu} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}_{(gr)}}{\partial (\partial \tau^\mu / \partial x^\alpha)}, \quad (5.7.8)$$

приводящее к левым частям четырех уравнений Эйнштейна. Поскольку в вакууме эти части равны нулю, то приходим к четырем уравнениям Эйнштейна, соответствующим уравнениям первичной связи в дираковском каноническом формализме:

$$P_\mu = 0 \quad \rightarrow \quad \left({}^4R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu} {}^4R}{2} \right) \tau^\nu = 0. \quad (5.7.9)$$

III. Обобщенные скорости, соответствующие оставшимся 6 обобщенным гравитационным «координатам» h_{ik} , следует определить через монадные временные производные

$${}^* \partial_T h^{ik} = -2d^{ik}, \quad (5.7.10)$$

тогда обобщенные импульсы получаем в виде

$$p_{ik} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}_{(gr)}}{\partial ({}^* \partial_T h^{ik})} = \tau_0 \sqrt{\hbar} (d_{ik} + h_{ik} d). \quad (5.7.11)$$

Обратные соотношения легко находятся в виде:

$${}^* \partial_T h^{ik} = -\frac{2}{\tau_0 \sqrt{\hbar}} \left(p^{ik} + \frac{h^{ik} p}{2} \right), \quad (5.7.12)$$

где $p = h^{ik} p_{ik} = -2\tau_0 \sqrt{\hbar} d$.

IV. Плотность гамильтониана определим, как обычно:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{H}}_{(gr)} &= P_\mu \tau^\mu + p_{ik} {}^* \partial_T h^{ik} - \tilde{\mathcal{L}}_{(gr)} = \\ &= P_\mu \tau^\mu + \frac{1}{\tau_0 \sqrt{h}} \left(\frac{p^2}{2} - p_{ik} p^{ik} \right) - \tau_0 \sqrt{h} {}^3 R.\end{aligned}\quad (5.7.13)$$

V. Канонические уравнения для четырех пар переменных x^μ и P_μ тривиальны:

$${}^* \partial_T P_\mu = - \frac{\delta \tilde{\mathcal{H}}_{(gr)}}{\delta x^\mu} = 0; \quad \partial_T x^\mu = \frac{\delta \tilde{\mathcal{H}}_{(gr)}}{\delta P_\mu} = \tau^\mu. \quad (5.7.14)$$

VI. Половина из оставшихся шести пар канонических уравнений эквивалентна шести уравнениям Эйнштейна

$${}^* \partial_T p_{ik} = - \frac{\delta \tilde{\mathcal{H}}_{(gr)}}{\delta h^{ik}} \rightarrow \left({}^4 R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} {}^4 R \right) h_i^\mu h_k^\nu = 0, \quad (5.7.15)$$

а вторая половина

$${}^* \partial_T h^{ik} = \frac{\delta \tilde{\mathcal{H}}_{(gr)}}{\delta p_{ik}} \quad (5.7.16)$$

совпадает с соотношениями (5.7.12).

Таким образом в каноническом формализме все десять уравнений Эйнштейна записываются в виде канонических уравнений. Последние шесть из них принято называть *динамическими*, тогда как первые четыре — *уравнениями связей*.

VII. Аналогичным образом строится гамильтонова формулировка электромагнитного поля. В ней плотность лагранжиана электромагнитного поля в кинеметрической калибровке монадного метода представляется в виде

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}}_{(A)} &= - \frac{\sqrt{-g}}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \\ &= - \frac{\tau_0 \sqrt{h}}{2} \left(- h^{ik} {}^* \partial_T \tilde{A}_i {}^* \partial_T \tilde{A}_k + 2 H^{ik} {}^* \partial_T \tilde{A}_i ({}^* \nabla_k - a_k) A - \right. \\ &\quad \left. - h^{ik} ({}^* \nabla_i - a_i) A ({}^* \nabla_k - a_k) A + \frac{H_{ik} H^{ik}}{2} \right),\end{aligned}\quad (5.7.17)$$

где использованы проекции электромагнитных величин, введенные в § 4.4 В этом подходе динамическими переменными выступают пространственно-спроецированные компоненты электромагнитного потенциала. Именно им соответствуют три канонические уравнения, совпадающие с тремя уравнениями Максвелла из второй пары. Времени-подобная компонента A не является динамической. Ей соответствует уравнение связи, совпадающее с времени-подобной компонентой второй пары уравнений Максвелла.

5.7.3. Уравнения Эйнштейна как уравнения линий в суперпространстве Уилера—ДеВитта

I. Монадный метод в кинеметрической калибровке позволяет взглянуть на суть общей теории относительности и уравнений Эйнштейна глобально, используя понятие суперпространства⁵⁾, введенное Дж. Уилером и Б. ДеВиттом [8]. Оно определяется как совокупность возможных 3-мерных пространственных сечений 4-мерного пространственно-временного многообразия. Полагается, что эти сечения ортогональны конгруэнции нормальной системы отсчета.

Поскольку одну и ту же 3-мерную риманову метрику можно записать в разных координатных системах, соответствующих кинеметрическим преобразованиям (4.3.8)–(4.3.9), то в суперпространстве одна и та же метрика описывается некоторым множеством точек. Отождествляя все метрики, связанные этими преобразованиями, приходим к так называемому *первичному суперпространству*, где все точки, полученные из одной кинеметрическими преобразованиями, называются *орбитой*.

II. В первичном суперпространстве инфитезимальным образом задается метрика — расстояние между двумя близкими 3-мерными римановыми пространствами (сечениями 4-мерного пространства-времени):

$$d\sigma^2 = \iint \tilde{G}^{ijk'l'} \delta h_{ij} \delta_{k'l'} d^3x d^3x', \quad (5.7.18)$$

⁵⁾ Не следует путать с суперпространством в физике микромира, основанном на свойстве суперсимметрии между бозонными и фермионными переменными.

где δh_{ij} — бесконечно малые различия метрик h_{ij} двух близких пространств; $\tilde{G}^{ijk'l'}$ — суперметрический тензор. Интегрирование производится по координатам двух пространств. В этой формуле δh_{ij} выступает в роли, аналогичной дифференциалам координат dx^μ в определении квадрата интервала в римановом пространстве $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$.

III. Из самых общих соображений следует, что $\tilde{G}^{ijk'l'}$ следует выбрать в виде

$$\tilde{G}^{ijk'l'} = \frac{\tau_0 \sqrt{h}}{2w} \delta^3(x - x') (h^{ik} h^{jl} + h^{il} h^{kj} - 2h^{ij} h^{kl}) \equiv G^{ijkl} \delta^3(x - x'). \quad (5.7.19)$$

Ковариантные компоненты суперметрического тензора определяются из естественного условия

$$\int \tilde{G}_{ijm'n''} \tilde{G}^{m'n''k'l'} d^3 x'' = \frac{1}{2} (\delta_i^k \delta_j^l + \delta_j^k \delta_i^l) \delta^3(x - x'). \quad (5.7.20)$$

Используя (5.7.19), отсюда находим:

$$\tilde{G}_{ijk'l'} = \frac{1}{2\tau_0 \sqrt{h}} \delta^3(x - x') (h_{ik} h_{jl} + h_{il} h_{kj} - h_{ij} h_{kl}) \equiv G_{ijkl} \delta^3(x - x'), \quad (5.7.21)$$

Легко видеть, что след суперметрического тензора удовлетворяет условию

$$\int \tilde{G}_{ijm'n''} \tilde{G}^{m'n''ij} d^3 x = 6\delta^3(x - x'). \quad (5.7.22)$$

IV. Эволюцию 3-мерных пространственных сечений при смещении вдоль соответствующих конгруэнций можно представить в виде неких линий в суперпространстве. Каждой линии соответствует решение шести пространственно-спроецированных уравнений Эйнштейна (4.4.16). Оказывается, эти уравнения можно записать в виде своеобразных уравнений типа геодезических линий с правой частью в суперпространстве с суперметрикой G_{ijkl} . В дальнейшем будем ее записывать без дельта-функции, что отображено отсутствием тильды над ее обозначением.

Аналогично символам Кристоффеля в обычном римановом пространстве определим коэффициенты связности в суперпространстве в виде

$$\Gamma_{ik}^{jlmn} = \frac{1}{2} G_{ikrs} \left(\frac{\delta G^{mnrs}}{\delta h_{jl}} + \frac{\delta G^{jirs}}{\delta h_{mn}} - \frac{\delta G^{jilmn}}{\delta h_{rs}} \right). \quad (5.7.23)$$

Тогда можно показать, что уравнения Эйнштейна (4.4.16) (без источников) представимы в виде

$${}^* \partial_T ({}^* \partial_T h_{ik}) + \Gamma_{ik}^{jlmn} ({}^* \partial_T h_{jl}) ({}^* \partial_T h_{mn}) = -\tau^0 G_{ikmn} \frac{\delta(2\tau_0 \sqrt{\hbar} {}^3 R)}{\delta h_{mn}}. \quad (5.7.24)$$

Эти уравнения напоминают уравнения движения

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = \mathcal{F}^\mu. \quad (5.7.25)$$

Правую часть в (5.7.24) можно понимать как некую суперсилу, получаемую из плотности суперпотенциала $2\tau_0 \sqrt{\hbar} {}^3 R$ способом, похожим на обычный:

$$\mathcal{F}_{ik} = -G_{ikmn} \frac{\delta(2\tau_0 \sqrt{\hbar} {}^3 R)}{\delta h_{mn}}. \quad (5.7.26)$$

5.7.4. ОТО в формализме Гамильтона—Якоби

Используя введенные выше понятия, можно более компактно записать через суперметрический тензор (5.7.21), обобщенные импульсы (5.7.11) и плотность гравитационного гамильтониана (5.7.13):

$$p^{ik} = G^{ikmn} d_{mn}; \quad (5.7.27)$$

$$\tilde{\mathcal{H}}_{(gr)} = G_{ikmn} p^{ik} p^{mn} + \tau_0 \sqrt{\hbar} {}^3 R. \quad (5.7.28)$$

В работах Дирака и других авторов было предложено представить вторичную гамильтонову связь (5.7.28) (уравнение Эйнштейна, спроецированное на монаду по двух индексам) как уравнение Гамильтона—Якоби в суперпространстве. Введя функционал S такой, что

$$p^{ik} = \frac{\partial S}{\partial h_{ik}}, \quad (5.7.29)$$

получаем гравитационное уравнение Гамильтона—Якоби

$$G_{ikmn} \frac{\partial S}{\partial h_{ik}} \frac{\partial S}{\partial h_{mn}} + \tau_0 \sqrt{h} {}^3R = 0. \quad (5.7.30)$$

В работах Дж. Уилера и Б. ДеВитта это уравнение в дальнейшем было использовано для записи квантового уравнения Уилера—ДеВитта (см. [8]), на основе которого развивается квантовая космология.

Контрольное задание

Исходя из плотности лагранжиана электромагнитного поля (5.7.17), записать канонические уравнения для электромагнетизма.

Глава 6

Пятимерная теория гравитации и электромагнетизма

Общая теория относительности решает задачу геометризации взаимодействий лишь частично, ограничившись гравитационным взаимодействием. Но идеология геометризации физики диктует распространение ее принципов и на другие виды взаимодействий. В XX веке решению этой проблемы уделялось значительное внимание, причем интерес к ней то возрастал и она становилась в центре внимания, то затухал (см. [4]). К концу XX века эта проблема вновь заняла достойное место в мировых исследованиях, и в настоящее время есть все основания полагать, что в принципиальном плане эта проблема уже решена (см. [1, 3, 5]). Последовательное увеличение размерности пространства-времени позволяет геометризовать сначала электромагнитное взаимодействие в рамках пятимерия, затем электрослабые (в 6 или 7 измерениях) и, наконец, в рамках 8 измерений — сильные взаимодействия [5]. Поскольку здесь излагается классическая теория гравитации, то ограничимся рассмотрением лишь 5-мерной объединенной теории гравитации и классического электромагнетизма.

§ 6.1. Монадный метод в 5-мерной геометрии

Отметим, что первая статья Калуцы [11, с. 529–534] и ряд последующих работ других авторов были недостаточно общими и четкими. Только спустя много лет идеи Калуцы были сформулированы в строгом и законченном виде. Оказалось, что для этой цели необходимо использовать монадный метод редукции 5-мерной теории на 4-мерное риманово пространство-время. Исторически монадный метод возник в связи с решением именно этой задачи (см. [15, с. 492–513]), и лишь спустя много лет был переоткрыт и усовершенствован при разработке методов описания систем отсчета в рамках 4-мерной общей теории относительности.

6.1.1. Допустимость перехода к многомерной теории

1. Прежде чем рассматривать 5-мерную теорию Калуцы следует устранить распространенное предубеждение против многомерия. Еще И. Кантом было установлено, что законы обратных квадратов для гравитационной и электростатической сил обусловлены 3-мерностью классического пространства. Это легко выводится из 3-мерных уравнений Пуассона для скалярных потенциалов соответствующих полей. В гипотетической теории, описывающей явления в плоском n -мерном пространстве, естественно также ожидать наличие сил, потенциалы которых φ удовлетворяют n -мерному уравнению Пуассона. Его решения и центральные силы находятся в виде

$$\varphi(r) = \frac{\alpha}{r^{n-2}} \quad \rightarrow \quad \mathcal{F} = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} \sim \frac{1}{r^{n-1}}, \quad (6.1.1)$$

где α — постоянная;

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2}.$$

Заметим, что аналогичная зависимость потенциала от радиальной координаты имеет место и в обобщении ОТО на случай $n + 1$ измерений. Так, сферически симметричное решение (Тангерлини) многомерных уравнений Эйнштейна в координатах кривизн находится в виде

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r^{n-2}}\right) (dx^0)^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r^{n-2}}} - r^2 d\Omega^2, \quad (6.1.2)$$

где $r = x^1$;

$$d\Omega^2 = (dx^2)^2 + \sin^2 x^2 (dx^3)^2 + \\ + \sin^2 x^2 \sin^2 x^3 (dx^4)^2 + \dots + \prod_{l=2}^{n-1} \sin^2 x^l (dx^n)^2. \quad (6.1.3)$$

Можно показать тем же способом, что и в 4-мерной теории, что из этого выражения в основном приближении получается квазиньютонова сила вида (6.1.1). В частности, в 5-мерной теории такого типа силы убывают обратно пропорционально кубу расстояния от центра.

II. На данном факте основаны многочисленные особенности физического мира в пространстве-времени четырех измерений по сравнению с гипотетическими мирами в пространствах иной размерности. Назовем главные из таких особенностей:

- Атомы устойчивы лишь в пространстве-времени четырех и менее измерений.
- Круговые орбиты пробных тел устойчивы в ньютоновом гравитационном поле лишь при $n \leq 4$.
- Принцип Гюйгенса справедлив лишь в пространствах нечетной размерности (в пространстве-времени четной размерности).
- Квантовая электродинамика неперенормируема в пространстве-времени с $n \geq 4$.
- Четыре — наименьшая размерность, начиная с которой теория Эйнштейна в вакууме содержательна.
- Уравнения Максвелла конформно инвариантны лишь в 4-мерном пространстве-времени.

Имеются и другие особенности 4-мерия, менее известные (см., например, [1, с. 234–244]).

III. Несмотря на перечисленные свидетельства выделенности 4-мерия, в многомерных (при $n + 1 > 4$) геометрических моделях физических взаимодействий типа теории Калуцы отсутствуют противоречия с выявленными особенностями 4-мерия благодаря следующим двум обстоятельствам.

1) Выводы об особенностях 4-мерия делались с использованием постулата, что все дополнительные размерности равноправны с наблюдаемыми классическими. Однако насколько необходим этот постулат? Уже в специальной теории относительности времени-подобная координата отличается от трех пространственно-подобных координат. В реальной обстановке для каждого из нас одна пространственно-подобная координата (направление вверх-вниз) выделена по сравнению с двумя другими (вперед-назад, влево-вправо). Оставшиеся две также неравноправны. Чтобы в этом убедиться, достаточно взглянуть на стрелку компаса.

При построении многомерных геометрических теорий следует отказаться от постулата равноправия дополнительных и классических измерений, полагая, что физические обстоятельства нашего

мира таковы, что в наблюдаемых условиях метрический тензор многомерного пространства-времени не зависит от дополнительных координат (или зависит циклически). В этом случае уже нельзя использовать симметрию вида (6.1.3), принятую в решении Тангерлини (6.1.2); тогда многомерные уравнения приводят к наблюдаемой зависимости сил обратно пропорциональной квадрату расстояния от центра.

2) При обсуждении электромагнитного поля обычно полагалось, что оно вносится в пространство-время извне, однако в многомерных геометрических моделях типа теории Калуцы электромагнитное (и другие физические поля) следует вводить через компоненты многомерного метрического тензора с помощью редукции к 4-мерной теории.

6.1.2. Монадный метод редукции ((4 + 1)-расщепления)

Чтобы прояснить все отождествления и ограничения, сделанные в 5-мерной теории Калуцы, начнем с изложения монадного метода в самом общем случае 5-мерного риманова пространства-времени, где монада направлена вдоль дополнительного, пятого измерения.

Монадный метод опять удобно представить состоящим из трех частей:

- 1) алгебры монадного метода;
- 2) задания монадных физико-геометрических тензоров;
- 3) определения монадных операторов дифференцирования.

На их основе записываются основные соотношения теории в монадном виде.

1. Алгебра монадного метода. Постулируется, что в каждой точке 5-мерного многообразия с метрическим тензором G_{AB} определен вектор (монада) $\lambda_A \equiv G(5)_A$. Исходной формулой является представление метрического тензора в виде

$$G_{AB} = \pm \lambda_A \lambda_B + g_{AB}, \quad (6.1.4)$$

где g_{AB} — метрический тензор 4-мерного пространственно-временного сечения, ортогонального λ_A . Здесь для общности допускаются две возможные сигнатуры: $(+ - - - +)$, соответствующая верхнему знаку в \pm , и $(+ - - - -)$, соответствующая нижнему знаку.

Составляющие 5-мерного метрического тензора в (6.1.4) удовлетворяют условиям ортонормированности

$$\lambda_A \lambda_B G^{AB} = \pm 1; \quad \lambda_A g^{AB} = 0; \quad g_{AB} g^{AB} = 4. \quad (6.1.5)$$

Как уже отмечалось, в монадном методе оперируют лишь с величинами, спроецированными либо на выделенное направление, либо на ортогональную ему гиперповерхность. Это достигается внутренним умножением тензорных величин $B_C^{A\dots}$ либо на вектор монады λ_A , либо на компоненты 4-мерного метрического тензора.

Выберем монаду λ^A вдоль направления дополнительной координаты x^5 , тогда из условия нормировки в (6.1.5) следует представление λ_A через компоненты 5-мерного метрического тензора:

$$\lambda^A = \frac{G_5^A}{\sqrt{\pm G_{55}}} = \left\{ \lambda^\mu = 0; \lambda^5 = \frac{1}{\sqrt{\pm G_{55}}} \right\}; \quad (6.1.6)$$

$$\lambda_A = \frac{G_{A5}}{\sqrt{\pm G_{55}}} = \left\{ \lambda_\mu = \frac{G_{5\mu}}{\sqrt{\pm G_{55}}}; \lambda_5 = \pm \sqrt{\pm G_{55}} \right\}.$$

Как и ранее, такое представление будем называть калибровкой монады, точнее — выбором *специальной калибровки* (типа хронометрической в ОТО).

В данной калибровке из формул (6.1.4) и (6.1.6) можно найти выражения компонент 4-мерного метрического тензора через компоненты G_{AB} , аналогичные (4.2.2) и (4.2.3):

$$g_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} \mp \lambda_\mu \lambda_\nu = G_{\mu\nu} - \frac{G_{\mu 5} G_{\nu 5}}{G_{55}}; \quad g^{\mu\nu} = G^{\mu\nu}; \quad g_\nu^\mu = G_\nu^\mu; \quad (6.1.7)$$

$$g_{5\mu} = 0; \quad g_{55} = 0; \quad g^{5\mu} = G^{5\mu}; \quad g_\mu^5 = \mp \lambda_\mu \lambda^5; \quad (6.1.8)$$

$$g_5^B = 0; \quad g^{55} = \pm [(\lambda^5)^2 - \lambda_5^2].$$

В данной калибровке выделяется подмножество систем координат, связанных преобразованиями:

$$x'^5 = x'^5(x^0, x^1, x^2, x^3, x^5); \quad (6.1.9)$$

$$x'^\mu = x'^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3). \quad (6.1.10)$$

Назовем калибровочно инвариантными 4-тензорами величины, инвариантные при преобразованиях 5-й координаты (6.1.9) и ковариантные относительно 4-мерных преобразований (6.1.10). Таковыми будут компоненты 4-мерного метрического тензора (6.1.7) и все спроецированные на классическое пространство-время тензоры. В такой теории будут использоваться лишь калибровочно инвариантные величины и операторы. В дальнейшем, где могут возникнуть недоразумения, их будем помечать тильдой сверху.

Квадрат 5-мерного интервала (6.1.4) можно представить в следующем виде

$$dI^2 = G_{AB} dx^A dx^B = ds^2 \pm d\lambda^2, \quad (6.1.11)$$

где использованы спроецированные смещения

$$d\lambda = dx^A \lambda_A; \quad ds^2 = g_{AB} d\tilde{x}^A d\tilde{x}^B \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (6.1.12)$$

II. Монадные физико-геометрические тензоры — это тензоры, которые можно построить из монадных составляющих метрического тензора и их первых производных. Как и в случае 4-мерной теории, имеются три и только три таких тензора:

$$\Phi_A = \mp \lambda^B (\lambda_{A,B} - \lambda_{B,A}) \rightarrow \Phi_\mu = \lambda^5 \left(-\frac{\partial \lambda_5}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \lambda_\mu}{\partial x^5} \right); \quad (6.1.13)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{AB} &= \pm \frac{g_A^C g_B^D (\lambda_{C,D} - \lambda_{D,C})}{2} \rightarrow \tilde{F}_{\mu\nu} = \\ &= \pm \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \lambda_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \lambda_\nu}{\partial x^\mu} + \Phi_\mu \lambda_\nu - \Phi_\nu \lambda_\mu \right); \end{aligned} \quad (6.1.14)$$

$$D_{AB} = \frac{(\lambda^C g_{AB,C} + \lambda_{,B}^C g_{AC} + \lambda_{,A}^C g_{BC})}{2} \rightarrow D_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\lambda_5} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^5}. \quad (6.1.15)$$

Во всех этих формулах соответствующие тензоры сначала записаны в общековариантном виде, а затем переписаны в используемой калибровке. Запятой, как обычно, обозначены частные производные.

III. Монадные операторы дифференцирования заменяют ковариантные производные и по определению таковы, что, действуя на спроецированные величины, приводят к спроецированным же выражениям. Таковых операторов, как и в 4-мерной теории, два.

1. Монадный оператор по выделенному направлению записывается проецированием производной Ли по всем индексам на ортогональные λ_A направления. Запишем этот оператор сразу в используемой калибровке

$$\partial_5^+ \tilde{B}_{\nu \dots}^{\mu \dots} = \lambda^B \frac{\partial \tilde{B}_{\nu \dots}^{\mu \dots}}{\partial x^B} = \frac{1}{\lambda_5} \frac{\partial \tilde{B}_{\nu \dots}^{\mu \dots}}{\partial x^5}. \quad (6.1.16)$$

Этот оператор не зависит ни от ранга, ни от ковариантности дифференцируемой величины.

2. Оператор ковариантного дифференцирования по направлениям, ортогональным выделенному, имеет вид

$$\nabla_{\sigma}^+ \tilde{B}_{\nu \dots}^{\mu \dots} = \partial_{\sigma}^+ \tilde{B}_{\nu \dots}^{\mu \dots} + \tilde{\Gamma}_{\sigma\lambda}^{\mu} \tilde{B}_{\nu \dots}^{\lambda \dots} + \dots - \tilde{\Gamma}_{\sigma\nu}^{\lambda} \tilde{B}_{\lambda \dots}^{\mu \dots} + \dots, \quad (6.1.17)$$

где использованы обозначения

$$\partial_{\sigma}^+ = \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} - \frac{G_{5\sigma}}{G_{55}} \frac{\partial}{\partial x^5} \quad (6.1.18)$$

— калибровочно инвариантный оператор дифференцирования по направлениям сечения, ортогонального λ_A («удлиненная производная»);

$$\tilde{\Gamma}_{\sigma\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_{\lambda}^+ g_{\sigma\nu} + \partial_{\sigma}^+ g_{\nu\lambda} - \partial_{\nu}^+ g_{\sigma\lambda}) \quad (6.1.19)$$

— калибровочно инвариантная связность в сечении.

6.1.3. Геометрические уравнения в монадном виде

Как и в случае 4-мерной теории, монадный вид соотношений означает их представление в такой форме, что в них входят только спроецированные величины, монадные физико-геометрические тензоры и монадные операторы дифференцирования. Выпишем в калибровочно инвариантном виде наиболее важные для построения физической теории геометрические величины и уравнения.

1. Уравнения геодезических линий в 5-мерной теории имеют вид

$$\frac{d^2 x^A}{dI^2} = -\Gamma_{BC}^A \frac{dx^B}{dI} \frac{dx^C}{dI}, \quad (6.1.20)$$

где 5-мерные символы Кристоффеля записываются в обычном виде.

Введем калибровочно инвариантные компоненты 5-скорости:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}; \quad \frac{d\lambda}{ds} = \lambda_5 \frac{dx^5}{ds} + \lambda_\mu u^\mu, \quad (6.1.21)$$

тогда уравнения геодезических линий можно представить в виде скалярной и 4-мерной векторной частей:

$$\frac{d^2\lambda}{ds^2} = \left[1 \pm \left(\frac{d\lambda}{ds} \right)^2 \right] \left(D_{\mu\nu} u^\mu u^\nu - \frac{d\lambda}{ds} \Phi_\mu u^\mu \right); \quad (6.1.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{du^\mu}{ds} = & -\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha u^\beta - 2 \frac{d\lambda}{ds} \tilde{F}_{\nu}^\mu u^\nu \pm \frac{d\lambda}{ds} u^\nu (u^\mu u^\alpha D_{\alpha\nu} - 2D_\nu^\mu) \pm \\ & \pm \left(\frac{d\lambda}{ds} \right)^2 (\Phi^\mu - u^\mu u_\nu \Phi^\nu). \end{aligned} \quad (6.1.23)$$

(При записи векторного уравнения было использовано скалярное.)

II. Компоненты 5-мерного тензора Риччи в калибровочно инвариантном виде представляются следующим образом:

$$\begin{aligned} {}^5R^{\mu\nu} = & {}^4\tilde{R}^{\mu\nu} - \Phi^\mu \Phi^\nu \mp DD^{\mu\nu} \pm 2D^{\mu\sigma} D_\sigma^\nu \mp 2\tilde{F}^{\mu\sigma} F_\sigma^\nu - \\ & - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \left(\frac{\nabla_\alpha^+ \Phi_\beta + \nabla_\beta^+ \Phi_\alpha}{2} \pm \partial_5^+ D_{\alpha\beta} \right); \end{aligned} \quad (6.1.24)$$

$${}^5R_B^\mu \lambda^B = \nabla_\nu^+ (D^{\mu\nu} \pm \tilde{F}^{\nu\mu} - Dg^{\mu\nu}) \pm 2\Phi_\alpha \tilde{F}^{\alpha\mu}; \quad (6.1.25)$$

$${}^5R_{AB} \lambda^A \lambda^B = \mp (\mp \nabla_\alpha^+ \Phi^\alpha - \partial_5^+ D \mp \Phi^\alpha \Phi_\alpha - D_{\alpha\beta} D^{\alpha\beta} + \tilde{F}_{\alpha\beta} \tilde{F}^{\alpha\beta}), \quad (6.1.26)$$

где

$$\begin{aligned} {}^4\tilde{R}^{\sigma}_{\mu\nu\rho} = & \partial_\nu^+ \tilde{\Gamma}_{\mu\rho}^\sigma - \partial_\rho^+ \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\sigma + \tilde{\Gamma}_{\mu\rho}^\alpha \tilde{\Gamma}_{\alpha\nu}^\sigma - \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha \tilde{\Gamma}_{\alpha\rho}^\sigma; \\ {}^4\tilde{R}^{\mu\nu} = & {}^4\tilde{R}^{\rho\mu\nu}; \quad {}^4\tilde{R} = {}^4\tilde{R}^{\alpha\beta}_{\dots\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (6.1.27)$$

Особый интерес представляет 5-мерная скалярная кривизна, играющая в физической теории роль геометрического лагранжиана. В монадном виде она представляется следующим образом

$$\begin{aligned} {}^5R = & {}^5R_{AB} G^{AB} = {}^4\tilde{R} \mp D^2 \mp D_{\mu\nu} D^{\mu\nu} \mp \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} - \\ & - 2(\pm \partial_5^+ D + \Phi_\alpha \Phi^\alpha + \nabla_\alpha^+ \Phi^\alpha). \end{aligned} \quad (6.1.28)$$

III. Обобщенные 5-мерные уравнения Эйнштейна постулируются в том же виде, что и 4-мерные:

$${}^5R_{AB} - \frac{1}{2}G_{AB}{}^5R = \tilde{\alpha} Q_{AB}, \quad (6.1.29)$$

где $\tilde{\alpha}$ — постоянная. Эти уравнения сыграли важную роль при анализе возможностей теории Калуцы, поэтому выпишем их в самом общем калибровочно инвариантном виде:

$$\begin{aligned} {}^4\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}{}^4\tilde{R} = & \pm 2 \left(\tilde{F}_{\mu\alpha}\tilde{F}_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}\tilde{F}_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta} \right) + \tilde{\alpha}\tilde{Q}_{\mu\nu} + \\ & + \Phi_{\mu}\Phi_{\nu} + \frac{\tilde{\nabla}_{\mu}^{+}\Phi_{\nu} + \tilde{\nabla}_{\nu}^{+}\Phi_{\mu}}{2} - g_{\mu\nu}(\Phi_{\alpha}\Phi^{\alpha} + \tilde{\nabla}_{\alpha}^{+}\Phi^{\alpha}) + \\ & + (\tilde{F}_{\nu}^{\alpha}D_{\mu\alpha} + \tilde{F}_{\mu}^{\alpha}D_{\nu\alpha}) \pm DD_{\mu\nu} \mp 2D_{\mu\alpha}D_{\nu}^{\alpha} \pm \partial_5^{+}D_{\mu\nu} \mp \\ & \mp \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(D^2 + D_{\alpha\beta}D^{\alpha\beta} + 2\partial_5^{+}D); \end{aligned} \quad (6.1.30)$$

$$\tilde{\nabla}_{\nu}^{+}(D^{\mu\nu} \pm \tilde{F}^{\mu\nu} - Dg^{\mu\nu}) \pm 2\Phi_{\alpha}\tilde{F}^{\alpha\mu} \doteq \tilde{\alpha}Q_B^{\mu}\lambda^B; \quad (6.1.31)$$

$$-\frac{{}^4\tilde{R}}{2} \pm \frac{3}{2}\tilde{F}_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta} \pm \frac{D^2 - D_{\alpha\beta}D^{\alpha\beta}}{2} = -\tilde{\alpha}Q_{AB}\lambda^A\lambda^B. \quad (6.1.32)$$

Контрольные задания

1. Обосновать, почему для построения 5-мерной объединенной теории гравитации и электромагнетизма непригодна калибровка монады λ^A типа кинеметрической.
2. Представить в монадном (т. е. в $(i+4)$ -расщепленном) виде формально записанную вторую пару 5-мерных уравнений Максвелла

$$\nabla_B F^{AB} = J^A,$$

где J^A — плотность 5-мерного тока. Сравнить получившиеся выражения с 5-мерными уравнениями Эйнштейна (6.1.30).

§ 6.2. Пятимерная теория Калуцы

Перейдем от 5-мерной *геометрической* теории в монадном виде к объединенной *физической* теории гравитационного и электромагнитного взаимодействий.

6.2.1. Переход от 5-мерной геометрии к электродинамике в ОТО

Даже беглое сопоставление полученных в 5-мерной теории уравнений со стандартными в ОТО и электродинамике указывает на многочисленные удивительные аналогии и совпадения, которые вряд ли могут быть случайными.

I. Перечислим отождествления и постулаты, используемые в 5-мерной теории Калуцы (без скаляризма).

1) Необходимо отождествить (через размерный множитель) антисимметричный физико-геометрический тензор $\tilde{F}_{\mu\nu}$ с электромагнитным тензором $F_{\mu\nu}$, а λ_μ — с векторным потенциалом A_μ .

2) Для обеспечения нужного знака (минус) перед тензором энергии-импульса электромагнитного поля (см. (1.5.18)) в правой части уравнения (6.1.29) следует выбрать 5-ю координату пространственно-подобной, то есть взять сигнатуру (+ - - - | -).

3) Чтобы устранить из всех уравнений симметричное тензорное поле $D_{\mu\nu}$, достаточно постулировать независимость компонент 5-метрики от 5-й координаты (условие цилиндричности по x^5):

$$\frac{\partial G_{AB}}{\partial x^5} = 0. \quad (6.2.1)$$

4) Для того, чтобы сохранялось условие цилиндричности по 5-й координате, допустимые преобразования по дополнительной координате должны быть сужены до

$$x'^5 = x^5 + f(x^0, x^1, x^2, x^3), \quad (6.2.2)$$

где $f(x^\mu)$ — функция лишь четырех классических координат.

5) Для устранения векторного поля Φ_α достаточно, кроме условия цилиндричности, потребовать постоянство 15-й компоненты метрического тензора, например, положить

$$G_{55} = -1. \quad (6.2.3)$$

6) Для того, чтобы слагаемое в (6.1.23) справа, содержащее $F_{\mu\nu}$, превратилось в известную в электродинамике силу Лоренца, необ-

ходимо положить, что пятая компонента скорости пропорциональна отношению электрического заряда частицы q к ее массе m :

$$\frac{d\lambda}{ds} = -\frac{q}{2m\sqrt{G}}. \quad (6.2.4)$$

II. В итоге получается классическая теория электромагнетизма в искривленном пространстве-времени. Перечислим характерные черты этой теории.

1) В ней осуществляются следующие отождествления геометрических и физических величин:

$$A_\mu = \frac{c^2}{2\sqrt{G}} G_{5\mu}; \quad F_{\mu\nu} = \frac{c^2}{\sqrt{G}} \tilde{F}_{\mu\nu}; \quad (6.2.5)$$

$$g_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - G_{5\mu} G_{5\nu} = G_{\mu\nu} - \frac{4G}{c^4} A_\mu A_\nu. \quad (6.2.6)$$

2) При наложенных выше условиях обобщенные связности (6.1.19) превращаются в обычные символы Кристоффеля:

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu \rightarrow \Gamma_{\alpha\beta}^\mu, \quad (6.2.7)$$

а 4-мерные аналоги тензора кривизны совпадают с общепринятыми 4-мерными величинами.

3) Скалярная кривизна (6.1.27) превращается в стандартную плотность лагранжиана гравитационного и электромагнитного полей.

4) Дополнительное скалярное уравнение геодезической линии (6.1.22) превращается в условие постоянства отношения электрического заряда частицы к ее массе:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{q}{m} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{q}{m} = \text{const}. \quad (6.2.8)$$

5) Электромагнитный векторный потенциал, согласно определению (6.2.5), не является инвариантом относительно преобразований 5-й координаты (6.1.9) и (6.2.2). При преобразованиях (6.2.2) он изменяется по закону

$$A'_\alpha = A_\alpha + \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}, \quad (6.2.9)$$

представляющему собой известные калибровочные преобразования электромагнитного векторного потенциала в стандартной электродинамике.

6) В теории Калуцы используется условие цилиндричности (независимости) по 5-й координате лишь для компонент метрического тензора, тогда как внешние к геометрии физические поля Φ (произвольного спина) в общем случае зависят от 5-й координаты. Постулируется, что зависимость от x^5 имеет место для электрически заряженных полей и носит *циклический характер*

$$\Phi = \varphi(x^\mu) \exp \{i\alpha\epsilon_5 x^5\} \equiv \varphi(x^\mu) \exp \left\{ \frac{i e c \epsilon_5}{2\sqrt{G}\hbar} x^5 \right\}, \quad (6.2.10)$$

где $\varphi(x^\mu)$ — часть волновой функции, зависящая только от четырех классических координат, ϵ_5 — целое число (гармоника), характеризующее заряд поля Q в единицах заряда электрона e :

$$\epsilon_5 = Q. \quad (6.2.11)$$

Циклическую зависимость (6.2.10) следует понимать как замкнутость (периодичность) многообразия по 5-й координате с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{4\pi\sqrt{G}\hbar}{ec} = 4\pi \frac{l_0}{\sqrt{\gamma_0}} \approx 10^{-31} \text{ см}, \quad (6.2.12)$$

где выделены две характерные физические константы:

$$l_0 = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}; \quad \gamma_0 = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$$

— соответственно планковская длина и постоянная тонкой структуры. Это означает, что в 5-мерной теории используется топология цилиндра в духе работы А. Эйнштейна и П. Бергмана 1930-х годов [14, с. 492–513].

7) При сделанных отождествлениях собственные значения оператора монадного дифференцирования по 5-й координате (6.1.16) определяют электрический заряд поля. Второй оператор монадного 4-мерного дифференцирования (6.1.18) означает

$$\partial_\mu^+ \Phi = \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{2\sqrt{G}}{c^2} A_\mu \frac{\partial}{\partial x^5} \right) \Phi = \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{i e \epsilon_5}{c\hbar} A_\mu \right) \Phi, \quad (6.2.13)$$

т. е. совпадает с общепринятой «удлиненной производной» в стандартной электродинамике.

8) Легко убедиться, что при допустимых в теории Калуцы преобразованиях 5-й координаты (6.2.2) 5-мерные волновые функции Φ из (6.2.10) испытывают известные калибровочные изменения

$$\Phi \rightarrow \Phi \exp\left(\frac{ie}{c\hbar} f\right) \quad (6.2.14)$$

одновременно с преобразованием электромагнитного векторного потенциала (6.2.9), тогда как оператор (6.2.13) при этом остается инвариантным.

III. Резюмируя изложенное можно утверждать, что 5-мерная теория гравитации и электромагнетизма Калуцы обладает рядом несомненных достоинств. В литературе их иногда называют «чудесами» теории Калуцы. Можно выделить четыре основных «чуда».

- (1) Пятнадцать 5-мерных уравнений Эйнштейна автоматически расщепляются на десять обычных 4-мерных уравнений Эйнштейна, четыре уравнения Максвелла и еще одно скалярное уравнение.
- (2) В получаемой таким образом системе 4-мерных уравнений Эйнштейна в правой части автоматически возникает тензор энергии-импульса электромагнитного поля.
- (3) Уравнения 5-мерной геодезической линии автоматически приводят к уравнениям движения заряженной частицы в искривленном пространстве-времени при наличии электромагнитного поля.
- (4) Известные в электродинамике калибровочные преобразования векторного электромагнитного потенциала следуют из допустимых преобразований 5-й координаты.

6.2.2. Вариант 5-мерной теории Калуцы—Клейна

В настоящее время принято называть 5-мерную теорию гравитации и электромагнетизма теорией Калуцы—Клейна, однако под этим названием кроются две совершенно различные теории, преследующие разные цели. Как уже отмечалось, теория Калуцы нацелена на геометризацию электромагнитных взаимодействий, тогда как 5-мерная

теория О. Клейна, точнее, теория Клейна—Фока—Румера предназначена для геометрического описания масс. Рассмотрим основные идеи второго варианта 5-мерной теории.

I. На стандартную общую теорию относительности можно взглянуть как на оптику в 5-мерном пространстве-времени. Для этого квадрат 4-мерного интервала следует представить в форме

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \rightarrow g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - ds^2 \equiv G_{AB} dx^A dx^B = 0, \quad (6.2.15)$$

где в качестве пятой координаты, которую теперь будем нумеровать индексом 4, выбран интервал

$$s \equiv x^4 \rightarrow ds = dx^4. \quad (6.2.16)$$

Эту дополнительную координату также следует считать пространственно-подобной, т. е. данное многообразие имеет сигнатуру $(+ - - - | -)$.

II. Метрике 5-оптики (6.2.15) в импульсном пространстве соответствует выражение

$$m_0^2 = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu \rightarrow g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu - (p^4)^2 \equiv G_{AB} p^A p^B = 0, \quad (6.2.17)$$

где в качестве дополнительной (пятой) компоненты импульса выступает масса покоя m_0 частицы:

$$p^4 = m_0. \quad (6.2.18)$$

III. Оскар Клейн и В. А. Фок в своих работах 1926 года обратили внимание на то, что релятивистское обобщение уравнения Шрёдингера (уравнение Клейна—Фока), можно представить как оптическое уравнение, описывающее распространение скалярных безмассовых волн в 5-мерном пространстве-времени с метрикой (6.2.15)

$$G^{AB} \nabla_A \nabla_B \Phi = 0, \quad (6.2.19)$$

если постулировать, что 5-мерная волновая функция $\Phi(x^A)$ циклическим образом зависит от дополнительной координаты x^4

$$\Phi(x^A) = \varphi(x^\mu) \exp \{i\beta x^4\} \equiv \varphi(x^\mu) \exp \left\{ \frac{imc x^4}{\hbar} \right\}. \quad (6.2.20)$$

Здесь $\varphi(x^\mu)$ — часть волновой функции, зависящая лишь от четырех классических координат. В самом деле, если в (6.2.19) подставить (6.2.20), то для функции $\varphi(x^\mu)$ получается хорошо известное 4-мерное уравнение

$$\left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \varphi(x^\mu) = 0. \quad (6.2.21)$$

IV. На изложенную выше 5-мерную переформулировку ОТО можно смотреть как на формальный прием, однако О. Клейн, В. А. Фок, а позже и Ю. Б. Румер⁶⁾ увидели за этим нечто большее. Они исследовали 5-мерную теорию с более общим видом метрики, нежели в (6.2.15). О математическом содержании такой теории можно сказать практически все то же, что и о рассмотренной выше 5-мерной теории Калуцы. В частности, для ее построения следует использовать изложенный выше монадный метод (1+4)-расщепления, когда 5-мерный метрический тензор представляется в виде

$$G_{AB} = g_{AB} - \xi_A \xi_B, \quad (6.2.22)$$

где ξ_A — 5-мерный вектор — монада, заменяющий вектор λ_A в теории Калуцы.

V. Как и ранее, следует использовать калибровку, аналогичную хронометрической в ОТО, то есть вектор ξ направить вдоль линий координаты x^4 . В такой теории сохраняют силу все предыдущие формулы теории Калуцы, только теперь вместо координаты x^5 нужно писать координату x^4 . По-прежнему возникают три физико-геометрических тензора, которые будем отличать от прежних выражений индексом «4» в правом верхнем углу: $\tilde{F}_{\mu\nu}^{(4)}$, $\Phi_\mu^{(4)}$, $D_{\mu\nu}^{(4)}$.

VI. Далее естественно наложить на 5-мерную метрику условие цилиндричности по дополнительной координате и условие $G_{44} = -1$. Это, как и ранее, означает, что два из монадных физико-геометрических тензоров, определенных выше, обращаются в нуль:

$$\Phi_\mu^{(4)} = 0; \quad D_{\mu\nu}^{(4)} = 0.$$

⁶⁾ Этот подход к 5-мерию наиболее полно изложен в книге Ю. Б. Румера «Исследования по 5-оптике» (М.: ГИТТЛ, 1956).

Отличным от нуля оказывается только тензор $\tilde{F}_{\mu\nu}^{(4)}$, принимающий чисто роторный вид от ξ_μ .

VII. В данном подходе возникает проблема физической интерпретации антисимметричного тензора $\tilde{F}_{\mu\nu}^{(4)}$. Поскольку в 20-х годах XX века уже был известен вариант 5-мерной теории Т. Калуцы, то О. Клейн, В. А. Фок и Ю. Б. Румер предложили отождествить данное геометрическое поле с электромагнитным полем.

VIII. Однако в такой теории сразу же возникла трудность из-за того, что, согласно исходному постулату этой теории, негеометрические поля циклически зависели от дополнительной координаты согласно формуле (6.2.20), где в экспоненту входит масса частицы, а не электрический заряд, как это постулируется в (6.2.10) в рамках 5-мерной теории Калуцы. Это приводит к появлению в удлинённых производных (6.2.13) не электрического заряда, а массы частиц. Чтобы избежать эту трудность, указанные авторы предложили ввести электрический заряд непосредственно в компоненты 5-мерной метрики

$$\tilde{G}_{\mu 4} = \frac{e}{mc^2} A_\mu; \quad \tilde{G}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \frac{e^2}{m^2 c^4} A_\mu A_\nu, \quad (6.2.23)$$

тогда удлинённые производные (6.2.13) совпадают с удлинёнными производными в стандартной электродинамике.

Но такой прием означал отход от универсальности пространства-времени, т.е. отказ от важного принципа, лежащего в основе как общей теории относительности, так и 5-мерной теории Калуцы. Вместо универсального пространства-времени вводилось *конфигурационное пространство*, в котором метрический тензор зависит от характеристик рассматриваемой частицы. При одном сорте частиц это допустимо, но в общем случае нет.

IX. Исходя из изложенного, правильнее было бы называть теорией Калуцы—Клейна не 5-мерную, а 6-мерную теорию, в которой одна дополнительная размерность (x^4) использовалась бы для описания масс покоя частиц (назначение 5-мерной теории О. Клейна), а вторая дополнительная размерность (x^5) — предназначалась бы для геометризации электромагнитного взаимодействия (целевой установки теории Калуцы).

6.2.3. Анализ критических замечаний по 5-мерной теории Калуцы

Следует констатировать, что, несмотря на свои достоинства, 5-мерная теория Калуцы не завоевала всеобщего признания и не стала рабочим инструментом физиков. Это было обусловлено рядом обстоятельств различного характера. Некоторые из них имели субъективный (мнимый) характер, часть обстоятельств была связана с наличием альтернативных вариантов построения геометрической теории, но, как стало ясно позже, главные недостатки 5-мерных теорий были обусловлены тем, что они оказались неполными, урезанными частями геометрической теории большей размерности. Перечислим высказывавшиеся претензии к 5-мерной теории Калуцы.

I. Долгое время не был ясен физический смысл 5-й координаты. Известно, сколько трудностей психологического характера было связано с признанием теории относительности, в которой был осуществлен переход от 3-мерного пространства к 4-мерному пространству-времени. Но там новая размерность была физически интерпретируема как время, а в 5-мерии новая размерность вводилась из «небытия». Многие теоретики, начиная с Э. Маха, мыслили дополнительную размерность обладающей теми же свойствами, что и четыре классические, и пытались их как-то интерпретировать.

Последующие исследования показали, что дополнительная размерность должна быть компактифицирована, т. е. замкнута с очень малым периодом. Физическим смыслом обладает не 5-я координата, а 5-я компонента импульса, через которую вводятся электрические заряды частиц.

II. Сомнения вызывало условие цилиндричности компонент 5-мерной метрики по 5-й координате. Об этом неоднократно писал Эйнштейн (см. [15]), считая это условие искусственным.

Как стало затем ясно, условие цилиндричности по 5-й координате означает отсутствие у рассматриваемых полей электрического заряда. Очевидно, что и гравитационное поле (метрика $g_{\mu\nu}$), и электромагнитное поле (смешанные компоненты 5-мерной метрики) являются электрически нейтральными. Волновые функции заряженных частиц зависят от 5-й координаты, — пятая компонента импульса частиц имеет физический смысл электрического

заряда, а 5-я компонента скорости характеризует отношение электрического заряда к массе.

III. В 1920-х годах Эйнштейн считал существенным недостатком теории Калуцы необходимость волевым образом вводить в правую часть электромагнитных уравнений плотность электрического тока внешней материи [15]. Однако претензии к наличию правой части у 5-мерных уравнений в равной степени относятся и к его 4-мерным уравнениям. Это общее свойство геометрических теорий рассматриваемой парадигмы. Впрочем, Эйнштейна не удовлетворял этот факт и в 4-мерной теории: везде, где это было возможно, он избегал написания тензора энергии-импульса в правой части своих уравнений.

IV. Эйнштейн также выражал неудовлетворенность тем фактом, что не удастся физически истолковать компоненту G_{55} . В ряде работ предлагалось интерпретировать эту компоненту как потенциал некоего дополнительного поля геометрического происхождения. Этот вопрос более подробно рассмотрен в следующем разделе этой главы. Имелись и иные варианты интерпретации. Любой вариант решения этого вопроса не может служить доводом против 5-мерной теории.

V. В рассмотренном упрощенном варианте 5-мерной теории Калуцы использовано условие (6.2.3) (постоянства 15-й компоненты метрического тензора G_{55}), которое приводит к проблеме 15-го (скалярного) уравнения Эйнштейна (6.1.31), принимающего в электровакууме вид

$${}^4R + \frac{3G}{c^4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = 0. \quad (6.2.24)$$

Согласно этому уравнению, например, в кулоновском поле должна быть отличной от нуля скалярная кривизна, что противоречит 4-мерным уравнениям Эйнштейна (6.1.29). Это противоречие предлагалось устранять в рамках лагранжевой формулировки многомерной теории, в которой накладывается ряд условий на компоненты многомерной метрики, затем производится редукция (проецирование) гиперплотности лагранжиана на 4-мерие, и только после этого используется вариационный метод, приводящий в случае 5-мерия лишь к системе из 14 уравнений, не содержащей (6.2.24).

VI. Констатировалось, что в теории получено лишь формальное единство общей теории относительности и электромагнетизма Макс-

велла. Неоднократно отмечалось, что 5-мерная теория не дала каких-либо новых экспериментальных предсказаний. Действительно, в упрощенном варианте теории Калуцы получалось лишь то, что было известно и без 5-мерной теории. Однако нельзя забывать, что главные достоинства 5-мерной теории состоят, во-первых, в том, что она позволяет достичь значительной экономии в исходных постулатах, приводящих к электродинамике в искривленном пространстве-времени. Во-вторых, теория Калуцы позволила сделать следующий шаг (после создания ОТО) в геометризации физики, тем самым открыв путь для последующих шагов по геометризации иных видов физических взаимодействий. В-третьих, в варианте 5-мерной теории со скаляризмом есть ряд новых предсказаний.

VII. Принятию 5-мерной (многомерной) теории также препятствовали исследования альтернативных вариантов единых геометрических теорий, опирающихся на обобщения римановой геометрии в рамках 4-мерного пространства-времени. Среди них особое место занимала теория Вейля. Долгое время Эйнштейну и другим исследователям не было ясно, какой из этих путей предпочесть. Главное достоинство 4-мерия виделось в отсутствии проблемы с осмыслением сути дополнительной размерности.

Эта проблема со временем была решена в пользу теории Калуцы, поскольку теория Вейля столкнулась с рядом трудностей, которые пришлось устранять посредством введения дополнительных постулатов. Тем не менее в современной физике широко используются конформные преобразования (1.4.14), явившиеся важным элементом теории Вейля.

VIII. Развиваемые с 1930-х годов теории слабых и сильных взаимодействий позволили говорить о четырех видах фундаментальных взаимодействий. А поскольку 5-мерная теория связывала только два из них, это рассматривалось как ее существенный недостаток. Только в 1980-е годы, когда стало ясно, что слабые и сильные взаимодействия переносятся промежуточными векторными бозонами, была осознана применимость многомерных теорий для описания не только электромагнитного, но и других взаимодействий при еще большем увеличении размерности.

Для геометризации электрослабых взаимодействий оказалось достаточно увеличить размерность пространственно-временного мно-

гообразия до шести, а для геометризации глюонов — переносчиков сильных взаимодействий — достаточно использовать 8-мерное пространственно-временное многообразие, в котором три дополнительные размерности имеют характер теории Калуцы (с их помощью вводятся три цветовых заряда хромодинамики) и одна размерность имеет назначение теории Клейна.

IX. Кроме основной задачи многомерной теории — объединения физических взаимодействий — в 8-мерной теории решается целый комплекс оставшихся проблем 5-мерной теории, которые оказываются тесно связанными друг с другом. Так, в теории Калуцы при описании заряженных элементарных частиц возникают значения масс порядка планковской массы. Это ставит вопрос о геометрических способах перенормировки планковских масс до экспериментально известных значений.

X. Одним из препятствий на пути признания 5-мерия стала квантовая теория, интенсивно развивавшаяся в 20-х — 30-х годах XX века. Ощущалась естественная потребность перебросить мостик между квантовой теорией и 5-мерием, однако это так и не удалось сделать.

Контрольные задания

1. Убедиться, что в уравнении Клейна—Фока, записанном в рамках 5-мерной теории Калуцы, возникает массовое слагаемое (планковская масса), обусловленное электрическим зарядом частицы. Показать как ее можно перенормировать до наблюдаемых значений через волевым образом вводимую затравочную массу.
2. В связи с тем, что для совмещения задач 5-мерной теории Калуцы и 5-мерной теории Клейна—Фока—Румера необходимо перейти к 6-мерной геометрической теории, указать, какие калибровки диадного метода (метода $(1 + 1 + 4)$ -расщепления) пригодны для этой цели.
3. По образу и подобию диадного метода в 4-мерной ОТО (см. § 5.4) развить алгебру диадного метода в калибровке типа «дважды хронометрической». Записать группы выделенных преобразований в данной калибровке.
4. Показать, что из 11 возможных диадных физико-геометрических тензоров в 6-мерии при условии цилиндричности компонент 6-мерной метрики по дополнительным координатам отличными

от нуля будут 5 тензоров. При условии постоянства компонент метрики G_{44} , G_{55} и G_{45} отличными от нуля останутся только два тензора. Какие?

§ 6.3. Теория Калуцы со скаляризмом

Как уже отмечалось, в большинстве работ по 5-мерию используется постулат $G_{55} = -1$ и исключается 15-е (скалярное) уравнение Эйнштейна. Однако представляет интерес рассмотрение полной системы из 15 уравнений (6.1.29)–(6.1.31). Отметим, что в основополагающей работе Калуцы условие (6.2.3) не накладывалось.

6.3.1. Скаляризм в 5-мерной теории

I. Введем специальное обозначение для скалярного поля геометрического происхождения

$$G_{55} = -\phi^2 \quad \rightarrow \quad \lambda_5 = -\phi; \quad \lambda^5 = \phi^{-1}; \quad \lambda_\mu = \frac{G_{5\mu}}{\phi}. \quad (6.3.1)$$

При наличии скалярного поля необходимо переопределить записанные выше формулы (6.2.5)–(6.2.6), интерпретирующие геометрические величины через физические

$$\lambda_\mu = \frac{2\sqrt{G}\phi}{c^2} A_\mu; \quad \tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{\sqrt{G}\phi}{c^2} F_{\mu\nu}; \quad \frac{d\lambda}{ds} = -\frac{q}{2m_0\sqrt{G}\phi}; \quad (6.3.2)$$

$$g_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + \frac{G_{5\nu}G_{5\mu}}{\phi^2} = G_{\mu\nu} + \frac{4G\phi^2}{c^4} A_\mu A_\nu. \quad (6.3.3)$$

II. Кроме того, теперь появится напряженность скалярного поля, описываемая физико-геометрическим вектором

$$\Phi_\mu = \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}. \quad (6.3.4)$$

В данном варианте 5-мерной теории Калуцы встает проблема физической интерпретации скалярного поля ϕ . В работах большинства авторов она рассматривается как потенциал пока не обнаруженного скалярного поля геометрического происхождения. Теорию с таким полем предлагается назвать 5-мерием со *скаляризмом* по аналогии с термином «электромагнетизм». Ниже будет рассмотрен ряд возможных эффектов, обусловленных геометрическим скалярным полем.

III. Учет геометрического скалярного поля сразу же вызывает следующую принципиальную проблему. Как правило, в теориях, где используются методы расщеплений (в частности, монадный метод) физическим смыслом наделяются величины, инвариантные при допустимых преобразованиях дополнительных координат (6.1.9) и ковариантные относительно 4-мерных преобразований (6.1.10). При использовании условия цилиндричности метрики по x^5 , как уже указывалось, необходимо сузить выделенный класс преобразований 5-й координаты (6.1.9) до (6.2.2). Оказывается, это сужение класса преобразований вызывает расширение множества инвариантных при таких преобразованиях величин. Назовём величины, инвариантные при преобразованиях (6.2.2) и ковариантные относительно (6.1.10) *специально калибровочно инвариантными*. В частности, таковыми становится компонента G_{55} , а следовательно, и потенциал скалярного поля $\lambda_5 = -\phi$. Если теперь считать физически значимыми специально калибровочно инвариантные величины, то таковых становится много. Так, ими являются все величины, получаемые из калибровочно инвариантных умножением на произвольную функцию $\mathcal{F}(\lambda_5)$. В связи с этим возникает вопрос: какие конструкции из геометрических характеристик должны быть сопоставлены с физическими величинами, главным образом, с метрическим тензором $g_{\mu\nu}$ и с тензором электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$?

IV. Выберем случай $\mathcal{F}(\lambda_5) = \lambda_5^2$, так что имеет место конформное преобразование в 5-мерии

$$\bar{G}_{AB} = \lambda_5^2 G_{AB}, \quad (6.3.5)$$

где \bar{G}_{AB} — исходная, а G_{AB} — «наблюдаемая» метрика; тогда 5-мерные уравнения Эйнштейна (6.1.29)–(6.1.31) принимают вид

$${}^4R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} {}^4R = -\frac{2G}{c^4} \left(F_{\mu\alpha} F_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) + \frac{3}{\lambda_5} (\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \lambda_5 - g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \lambda_5) - \frac{6}{\lambda_5^2} \lambda_{5,\mu} \lambda_{5,\nu} + \varkappa T_{\mu\nu}; \quad (6.3.6)$$

$$-\nabla_{\nu} F^{\nu\mu} - 3F^{\mu\nu} \frac{\lambda_{5,\nu}}{\lambda_5} = \frac{c^2 \varkappa}{\sqrt{G}} \lambda_5^3 Q_B^{\mu} \lambda^B; \quad (6.3.7)$$

$$g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \lambda_5 - \frac{1}{6} \left({}^4R + \frac{3G}{2c^4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \lambda_5 = -\frac{\alpha}{3} \lambda_5^3 Q_{AB} \lambda^A \lambda^B. \quad (6.3.8)$$

V. Данный вариант 5-мерия со скаляризмом обладает следующими достоинствами:

- В этом варианте после конформного преобразования $G_{55} = -1$, как в теории Калуцы. Весь вклад от этой компоненты содержится в скалярном поле λ_5 .
- Скалярное уравнение (6.3.8) в вакууме при $F_{\mu\nu} = 0$ представляет собой стандартное уравнение Клейна—Фока для безмассового скалярного поля λ_5 .
- Примечателен множитель $-1/6$ перед скалярной кривизной в (6.3.8), обычно вводимый в стандартной теории из соображений конформной инвариантности 4-мерного уравнения безмассового поля.
- Множитель перед тензором энергии-импульса электромагнитного поля справа в (6.3.6) не содержит λ_5 , то есть G является истинной гравитационной постоянной.

6.3.2. Сферически-симметричное решение со скаляризмом

I. Независимо от физической интерпретации компоненты G_{55} рассмотрим цилиндрические по 5-й координате статические сферически симметричные решения 5-мерных уравнений Эйнштейна. Простейшее из них получается из 4-мерной метрики Шварцшильда добавлением компонент $G_{55} = -1$, $G_{5\mu} = 0$:

$$dI^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) dx^{02} - \left(1 - \frac{r_g}{r} \right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - dx^{52}. \quad (6.3.9)$$

II. Более общее сферически симметричное решение, нежели (6.3.9), — со скалярным полем — было найдено в виде:

$$dI^2 = \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r} \right)^{2B} \left\{ \left[\left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r} \right)^{A-3B} dx^{02} - \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r} \right)^{-A-3B} dr^2 - r^2 \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r} \right)^{1-A-3B} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] - dx^{52} \right\}, \quad (6.3.10)$$

где \tilde{r}_g , A и B — константы. Последние две связаны соотношением

$$A^2 + 3B^2 = 1. \quad (6.3.11)$$

Ясно, что (6.3.10) переходит в метрику (6.3.9) при $B = 0$, $A = 1$.

III. Для удобства сопоставления с метрикой Шварцшильда желательно записать 4-мерную часть метрики, полученную процедурой $(4+1)$ -расщепления из (6.3.10), в координатах кривизн, то есть когда

$$g_{22} = -r^2.$$

Однако это можно сделать лишь в неявном виде, поэтому запишем 4-метрику в координатах кривизн приближенно. Переобозначим константы

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &= \frac{2B}{A-B} \quad \rightarrow \quad \tilde{r}_g = r_g \sqrt{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\alpha} + 1}; \\ A &= \frac{\tilde{\alpha} + 2}{2\sqrt{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\alpha} + 1}}; \quad B = \frac{\tilde{\alpha}}{2\sqrt{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\alpha} + 1}} \end{aligned} \quad (6.3.12)$$

и преобразуем r согласно формуле

$$r'^2 = r^2 \left(1 - \frac{\tilde{r}_g}{r} \right)^{1-A-3B}. \quad (6.3.13)$$

Очевидно, это преобразование входит в класс дозволённых преобразований.

IV. Представим компоненты метрики в виде ряда по r_g/r . После несложных вычислений находим

$$\begin{aligned} ds^2 \simeq & \left[1 - (1 - \tilde{\alpha}) \frac{r_g}{r} \right] dx^{02} - \left[1 + (1 + 2\tilde{\alpha}) \frac{r_g}{r} \right] dr^2 - \\ & - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2); \end{aligned} \quad (6.3.14)$$

$$\lambda_5^2 \equiv \phi^2 \simeq 1 - \tilde{\alpha} \frac{r_g}{r} - \frac{\tilde{\alpha}(\tilde{\alpha} + 1)}{2} \left(\frac{r_g}{r} \right)^2. \quad (6.3.15)$$

В любой интерпретации скаляризма λ_5 описывает распределённое вокруг источника безмассовое скалярное поле. При этом константа $\tilde{\alpha}$ (точнее, $\tilde{\alpha}r_g$) характеризует скалярный заряд источника.

6.3.3. Возможные эффекты скаляризма

I. При обсуждении возможных эффектов в 5-мерной теории с переменной компонентой G_{55} , прежде всего обращалось внимание на поправки к классическим эффектам ОТО. Они находятся из уравнений геодезических линий в 5-мерной метрике (6.3.10) (или в приближенной метрике (6.3.14) со скалярным полем (6.3.16)). Вычисления, аналогичные проделанным в метрике Шварцшильда, дают для смещения перигелия (Меркурия) и отклонения лучей света, проходящих вблизи Солнца, значения:

$$\delta\varphi = (1 + 2\tilde{\alpha})\delta\varphi_0, \quad \delta\beta = \left(1 - \frac{\tilde{\alpha}}{2}\right)\delta\beta_0, \quad (6.3.16)$$

где $\delta\varphi_0$ — угловое смещение перигелия а $\delta\beta_0$ — угол отклонения света в ОТО.

Ставился вопрос об обнаружении этих поправок или, по крайней мере, об оценках неизвестной константы $\tilde{\alpha}$. Из формул (6.3.16) следует, что при достаточно малых значениях параметра $\tilde{\alpha}$ различия между классическими эффектами в ОТО и в 5-мерной теории могут быть неощутимыми.

II. Значительно более ощутимые эффекты скаляризма можно ожидать, используя 5-е уравнение геодезической (6.1.22) при условии цилиндричности метрики по 5-й координате (когда $D_{\mu\nu} = 0$). Это уравнение можно представить в виде

$$\frac{d}{ds} \ln \left| \frac{(d\lambda/ds)^2}{1 - (d\lambda/ds)^2} \right| = -2 \frac{d}{ds} \ln \lambda_5, \quad (6.3.17)$$

где пока не использован конкретный вид λ_5 . Интегрируя это уравнение в общем случае находим

$$\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 = \frac{q^2}{4Gm^2} = \frac{W_0^2}{\lambda_5^2 + W_0^2(1 - \lambda_5^2)}, \quad (6.3.18)$$

где W_0^2 — постоянная интегрирования. Таким образом, отношение электрического заряда q к массе m частицы в 5-мерной теории со скаляризмом становится переменной величиной и определяется скалярным полем λ_5 .

III. Подставляя в (6.3.18) приближенное решение для λ_5 из (6.3.15), получаем

$$\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 \simeq W_0^2 \left[1 + \frac{r_g \tilde{\alpha}}{r}\right], \quad (6.3.19)$$

где положено $W_0 = q_0/m_0$.

IV. Из (6.3.19) следует, что отношение q/m , измеренное на Земле, должно изменяться с высотой из-за влияния скалярного заряда Земли. Кроме того, это отношение должно зависеть от расстояния Земли от Солнца (из-за влияния скалярного заряда Солнца). Учитывая, что орбита Земли — эллипс (максимальное расстояние в начале июля ~ 152 млн км и минимальное расстояние в начале января ~ 147 млн км), в теории со скаляризмом следовало бы ожидать сезонные изменения отношения q/m для измерений, проведенных на Земле. При этом наиболее выгодно производить измерения для частиц с максимально возможным значением q/m , т. е. для электронов ($q/m \sim 10^{18}$). Из (6.3.18) видно, что значения вариаций зависят от отношения r_g/r , а также от значения параметра $\tilde{\alpha}$, который должен быть определен экспериментально. (Более подробно обсуждение обусловленных этим эффектов см в [5].)

Контрольные задания

1. Записать упрощенную сферически симметричную 5-мерную метрику (6.3.9) в новых координатах, полученных в результате линейных преобразований:

$$\begin{aligned} x^0 &= \alpha_{00}x'^0 + \alpha_{50}x'^5; & x^5 &= \alpha_{50}x'^0 + \alpha_{55}x'^5; & x^i &= x'^i; \\ x'^0 &= \frac{\alpha_{55}}{\Delta}x^0 - \frac{\alpha_{05}}{\Delta}x^5; & x'^5 &= -\frac{\alpha_{50}}{\Delta}x^0 + \frac{\alpha_{00}}{\Delta}x^5, \end{aligned} \quad (6.3.20)$$

где $\Delta = \alpha_{00}\alpha_{55} - \alpha_{05}\alpha_{50}$.

2. Наложив на коэффициенты линейных преобразований (6.3.20) естественные условия: $\Delta = \pm 1$, $\alpha_{55}^2 - \alpha_{05}^2 = -1$, записать монадные физико-геометрические тензоры (в 5-мерии).
3. Показать, что линейные преобразования (6.3.20) приводят к возникновению в центральном источнике электрического заряда

$$q = -\left(\frac{r_r c^2}{2\sqrt{G}}\right)\alpha_{05}\alpha_{55}. \quad (6.3.21)$$

Заключение

В заключение сделаем ряд выводов.

- Эйнштейновская общая теория относительности одновременно является классической теорией гравитационных взаимодействий. В настоящее время термины ОТО и теория гравитации воспринимаются как синонимичные, однако общая теория относительности имеет более глубокое содержание, отражая современные представления о физическом пространстве-времени.

- Для описания наблюдаемых величин в рамках ОТО необходимо введение в искривленное пространство-время дополнительной структуры в виде времени-подобной конгруэнции мировых линий системы отсчета, так как только при этом условии общая теория относительности приобретает смысл, заключенный в ее названии.

- Координатные системы и системы отсчета представляют принципиально различные и не сводимые друг к другу понятия. Координатные системы означают лишь нумерацию точек пространства-времени, которая может выбираться в широких пределах. Конгруэнция линий системы отсчета не зависит от выбора нумерации точек, однако среди множества координатных систем можно выбрать наиболее удобные, так или иначе привязанные к используемой конгруэнции, что осуществляется специальным соглашением.

- В ОТО наблюдаемыми величинами могут быть лишь скаляры, т. е. тензорные выражения, спроецированные на физически выделенные направления (на монаду системы отсчета или физически заданные компоненты тетрады). Все утверждения о якобы «недостатках» ОТО в связи с неоднозначностью в ней выбора координатных систем представляются беспочвенными.

- Общая теория относительности — первый и принципиально важный этап развития геометрического миропонимания, позволяющего представить всю физику в терминах геометрии. В ОТО геометризовано лишь классическое гравитационное поле, но уже

на этом этапе удалось реализовать главные предвидения В. Клиффорда о трех возможных проявлениях искривленности пространства. Искривленность вблизи массивных тел описывается метриками Шварцшильда, Керра и некоторых их обобщений. Глобальное изменение во времени искривленности пространства описывается метриками Фридмана. Наконец, рябь искривленности на почти плоском пространстве описывается гравитационными волнами.

- Следующие этапы, состоящие в геометризации электромагнитного и других физических взаимодействий, осуществляются на основе увеличения размерности физического (искривленного) пространства-времени. В рамках пятимерия геометризуется электромагнитное взаимодействие, а в теориях более высокой размерности можно описать слабые и сильные взаимодействия. Поскольку эти взаимодействия проявляются в микромире, этот материал не включен в данную книгу, посвященную лишь классической теории гравитации.

- Следует обратить внимание на фундаментальные проблемы современной теории гравитации. Среди них выделим следующие три. Во-первых, это проблема совмещения принципов общей теории относительности и квантовой теории. В этой области исследований также накоплен большой объем идей и неудач. Их рассмотрение не входило в задачи данной книги.

Во-вторых, следует назвать проблему объединения гравитации с другими видами физических взаимодействий: электрослабым и сильным. Здесь было кратко рассмотрено лишь объединение гравитации с классическим электромагнитным взаимодействием.

В качестве третьей фундаментальной проблемы следует назвать обоснование совокупности современных астрофизических данных, в настоящее время решаемое посредством гипотез о темной энергии и темной материи, физическая природа которых не ясна.

- Наличие названных проблем, первые две из которых настойчиво пытались решить на протяжении всего XX века, свидетельствуют о необходимости поиска более глубоких принципов, лежащих в основе физического мироздания. Видимо, только на основе теории в рамках новой парадигмы удастся приступить к конструктивному решению названных и ряда других проблем.

Следует подчеркнуть, что переход к новой парадигме может быть осуществлен только при учете ключевых принципов уже существующих теорий, в том числе и идей общей теории относительности и многомерных геометрических моделей физических взаимодействий типа теорий Калуцы и Клейна. В искомой теории неизбежно должен выполняться принцип соответствия с существующими ныне теориями. Все это свидетельствует о необходимости владения физиками-теоретиками нового поколения идеями и методами изложенной здесь классической теории гравитации.

В заключение следует еще раз подчеркнуть, что материал данной книги (курса лекций) представляет собой лишь введение в классическую теорию гравитации, на основе которого можно приступить к углубленному и более детальному рассмотрению задач общей теории относительности. Однако главная задача предложенного курса лекций состоит в подготовке физиков-теоретиков к решению упомянутых здесь глобальных проблем современной теоретической физики.

Приложение

Билеты по курсу «Классическая теория гравитации» для экзамена/зачета

Первый семестр

Билет № 1

- 1) История с пятым постулатом Евклида. Первая неевклидова геометрия Лобачевского. Основные этапы создания общей теории относительности.
- 2) Общерелятивистские эффекты в метрике Керра.

Билет № 2

- 1) Тензоры (определение, законы преобразований ко- и контравариантных тензоров). Тензорная алгебра. Строгая теорема частного.
- 2) Метрика Керра (вид метрики, физический смысл констант, горизонт, эргосфера).

Билет № 3

- 1) Метрический тензор (ко-, контравариантные и смешанные компоненты метрического тензора). Сигнатура.
- 2) Однородные изотропные космологические модели (постановка задачи).

Билет № 4

- 1) Уравнения геодезических линий, их геометрический и физический смысл.
- 2) Однородные изотропные пространственные сечения (переход к 3-мерной метрике; три вида пространств).

Билет № 5

- 1) Понятие параллельного переноса (коэффициенты связности).
- 2) Пространства постоянной положительной кривизны.

Билет № 6

- 1) Символы Кристоффеля и их трансформационные свойства.
- 2) Закрытая однородная изотропная космологическая модель Фридмана (ход ее получения, характер эволюции).

Билет № 7

- 1) Ковариантные производные тензоров и их основные свойства.
- 2) Закрытая однородная изотропная космологическая модель Фридмана (ход ее получения, характер эволюции).

Билет № 8

- 1) Тензор кручения. Дифференциальная геометрия Схоутена и их использование в физических теориях.
- 2) Расширение Вселенной. Критическая плотность в теории однородных изотропных космологических моделей.

Билет № 9

- 1) Уравнения геодезических линий в присутствии электромагнитного поля.
- 2) Возможные виды однородных изотропных космологических моделей в зависимости от B и Λ .

Билет № 10

- 1) Тензор кривизны и его свойства симметрии.
- 2) Статический цилиндрический мир Эйнштейна. Космологическая постоянная.

Билет № 11

- 1) Тождества Риччи и Бианки. Локально-геодезические координатные системы.
- 2) Эффект отклонения лучей света в метрике Шварцшильда.

Билет № 12

- 1) Уравнения Эйнштейна. Космологическая постоянная.
- 2) Уравнения геодезических линий в метрике Шварцшильда. Физический смысл константы в метрике Шварцшильда.

Билет № 13

- 1) Уравнение Клейна—Фока в искривленном пространстве-времени.
- 2) Метрика Шварцшильда. Ход получения метрики. Гравитационный радиус.

Билет № 14

- 1) Тензор электромагнитного поля и первая пара уравнений Максвелла в искривленном пространстве-времени.
- 2) Эффект смещения перигелия Меркурия в метрике Шварцшильда.

Билет № 15

- 1) Вторая пара уравнений Максвелла в искривленном пространстве-времени.
- 2) Сферически-симметричные метрики (Шварцшильда, Райсснера—Нордстрема, Коттлера).

Второй семестр**Билет № 1**

- 1) Смысл и назначение систем отсчета в общей теории относительности и их отличие от координатных систем. Алгебра общековариантного монадного метода.
- 2) Отождествление геометрических и физических величин в 5-мерной теории Калуцы.

Билет № 2

- 1) Монадные физико-геометрические тензоры (в общековариантном виде).
- 2) В чем состоит проблема законов сохранения в общей теории относительности?

Билет № 3

- 1) Монадные операторы дифференцирования (в общековариантном виде).
- 2) Псевдотензор энергии-импульса гравитационного «поля» Эйнштейна.

Билет № 4

- 1) Уравнения геодезических линий в монадном виде и интерпретация монадных физико-геометрических тензоров.
- 2) Суть псевдотензорного подхода к законам сохранения в общей теории относительности.

Билет № 5

- 1) Метод хронометрических инвариантов (калибровка монады и алгебра метода).
- 2) Монадный подход к закону сохранения энергии в общей теории относительности (достоинства и недостатки).

Билет № 6

- 1) Метод хронометрических инвариантов (физико-геометрические тензоры и операторы монадного дифференцирования).
- 2) Электромагнитные величины и уравнения Максвелла в монадном виде.

Билет № 7

- 1) Метод кинеметрических инвариантов (калибровка монады и алгебра метода).
- 2) Возможные эффекты скаляризма в 5-мерной теории Калуцы.

Билет № 8

- 1) Метод кинеметрических инвариантов (физико-геометрические тензоры и операторы монадного дифференцирования).
- 2) Слабые плоские грави-инерциальные волны.

Билет № 9

- 1) Основные понятия диадного метода в общей теории относительности (алгебра, физико-геометрические тензоры). Задачи, где целесообразно использовать диадный метод.

- 2) Волновые решения уравнений Эйнштейна.

Билет № 10

- 1) Производные Ли и их основные свойства. Уравнения и векторы Киллинга.
- 2) Монадный метод в метриках Фридмана.

Билет № 11

- 1) Монадный метод в 5-мерной геометрии ((1 + 4)-расщепление). Условия, налагаемые на 5-мерную метрику.
- 2) Монадный метод в метрике Шварцшильда.

Билет № 12

- 1) Уравнения 5-мерных геодезических линий и их физическая интерпретация.
- 2) Различные формулировки общей теории относительности (геометрическая, лагранжева, гамильтонова и др.). Варианты выбора основных переменных.

Билет № 13

- 1) Уравнения Эйнштейна в 5-мерной теории Калуцы. «Чудеса» 5-мерной теории Калуцы.
- 2) Монадный метод в метрике Керра (хронометрический и кинеметрический способы введения систем отсчета).

Билет № 14

- 1) Пятимерная теория Клейна—Фока—Румера. Ее назначение и отличие от 5-мерной теории Калуцы.
- 2) Критерии гравитационных волн в общей теории относительности. Их смысл и недостатки.

Билет № 15

- 1) Анализ «недостатков» 5-мерной теории Калуцы и их устранение.
- 2) Уравнения Эйнштейна в монадном виде и основная идея дираковского канонического формализма общей теории относительности.

Темы курсовых работ

- 1) История создания общей теории относительности.
- 2) Точные решения уравнений Эйнштейна.
- 3) Координатные системы и системы отсчета.
- 4) Почему классическое пространство-время 4-мерно?
- 5) Концепция многомерия физического мира.
- 6) Обобщения эйнштейновской теории гравитации.
- 7) Эффекты общей теории относительности в неволновой зоне.
- 8) Экспериментальный поиск гравитационного излучения.
- 9) Гипотеза черных дыр.
- 10) Было ли начало Вселенной?
- 11) Современные астрофизические данные об эволюции Вселенной.
- 12) Гипотезы темной материи и темной энергии.

Литература

1. Альберт Эйнштейн и теория гравитации: Сб., посвящ. 100-летию со дня рождения А. Эйнштейна. М.: Мир, 1979.
2. *Владимиров Ю. С.* Системы отсчета в теории гравитации. М.: Энергоиздат, 1982.
3. *Владимиров Ю. С., Мицкевич Н. В., Хорски Я.* Пространство, время, гравитация. М.: Наука, 1984.
4. *Владимиров Ю. С.* Пространство-время: явные и скрытые размерности. М.: Наука, 1989.
5. *Владимиров Ю. С.* Метафизика. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2002 (2-е изд. 2009).
6. *Владимиров Ю. С.* Геометрофизика. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.
7. *Крамер Д., Штефани Х., Мак-Каллум М., Херльт Э.* Точные решения уравнений Эйнштейна / Под ред. Э. Шмутцера. М.: Энергоиздат, 1982.
8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М.: Наука, 1973.
9. *Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.* Гравитация. Т. 1, 2, 3. М.: Мир, 1977.
10. *Петров А. З.* Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука, 1966.
11. *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967; 6-е изд. М.: Издательство ЛКИ/URSS, 2008.
12. *Фок В. А.* Теория пространства времени и тяготения. М.: Физматгиз, 1961; 3-е изд. М.: Издательство ЛКИ/URSS, 2007.
13. *Эддингтон А. С.* Теория относительности. Л.; М.: ОНТИ, Гос. тех.-теорет. изд-во, 1934; 3-е изд. М.: КомКнига/URSS, 2007.
14. *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов. Т. 1. М.: Наука, 1965.
15. *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов. Т. 2. М.: Наука, 1966.
16. *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов. Т. 4. М.: Наука, 1967.

Уважаемые читатели! Уважаемые авторы!

Наше издательство специализируется на выпуске научной и учебной литературы, в том числе монографий, журналов, трудов ученых Российской академии наук, научно-исследовательских институтов и учебных заведений. Мы предлагаем авторам свои услуги на выгодных экономических условиях. При этом мы берем на себя всю работу по подготовке издания — от набора, редактирования и верстки до тиражирования и распространения.



URSS

Среди вышедших и готовящихся к изданию книг мы предлагаем Вам следующие:

- Фок В. А.* Теория пространства, времени и тяготения.
Фок В. А. Теория Эйнштейна и физическая относительность.
Эддингтон А. Теория относительности.
Эддингтон А. Пространство, время и тяготение.
Эддингтон А. Относительность и кванты.
Вейль Г. Пространство. Время. Материя. Лекции по общей теории относительности.
Иваненко Д. Д., Сарданашвили Г. А. Гравитация.
Сарданашвили Г. А. Современные методы теории поля. Т. 1-4.
Горбунов Д. С., Рубаков В. А. Введение в теорию ранней Вселенной.
Рубаков В. А. Классические калибровочные поля. Бозонные теории.
Рубаков В. А. Классические калибровочные поля. Теории с фермионами.
 Некоммутативные теории.
Фридман А. А. Мир как пространство и время.
Угаров В. А. Специальная теория относительности.
Саунцевич И. С. Экспериментальные корни специальной теории относительности.
Пименов Р. И. Анизотропное финслерово обобщение теории относительности.
Вильф Ф. Ж. Логическая структура частной теории относительности.
Гаерсоев В. Г. Измерение и свойства пространства-времени.
Вяльцев А. Н. Дискретное пространство-время.
Коноплева Н. П., Папов В. Н. Калибровочные поля.
Богуш А. А. Введение в калибровочную полевую теорию электрослабых взаимодействий.
Богуш А. А., Мороз Л. Г. Введение в теорию классических полей.
Прохоров Л. В., Шабанов С. В. Гамильтонова механика калибровочных систем.
Визгин В. П. Единые теории поля в квантово-релятивистской революции.
Кадомцев С. Б. Геометрия Лобачевского и физика.
 Серия «Классический университетский учебник»
Кононович Э. В., Мороз В. И. Общий курс астрономии.
Нишанов Б. С., Капитанов И. М., Юдин Н. П. Частицы и атомные ядра.
Квасников И. А. Термодинамика и статистическая физика. В 4 т.
Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.
Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей.
Колмогоров А. Н., Драгалин А. Г. Математическая логика.

По всем вопросам Вы можете обратиться к нам:
 тел./факс (499) 135-42-16, 135-42-46
 или электронной почтой URSS@URSS.ru
 Полный каталог изданий представлен
 в интернет-магазине: <http://URSS.ru>

Научная и учебная
литература



Физик-теоретик, доктор физико-математических наук (1976), профессор кафедры теоретической физики физического факультета МГУ, профессор Института гравитации и космологии Российского университета дружбы народов, академик РАЕН, вице-президент Российского гравитационного общества, главный редактор альманаха «Метафизика. Век XXI». Окончил физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова в 1961 г. Область научных интересов: классическая и квантовая теория гравитации, проблема объединения физических взаимодействий, многомерные модели физических взаимодействий, теория прямого межчастичного взаимодействия, теория систем отношений, метафизические и философские проблемы теоретической физики.

Ю. С. Владимиров — автор ряда монографий, среди которых: «Системы отсчета теории гравитации» (1982), «Пространство-время: явные и скрытые размерности» (1989), «Метафизика» (2002; 2009), «Геометрофизика» (2005), «Основания физики» (2008) и др.

Представляем другие книги нашего издательства:



7212 ID 101926

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ

интернет-магазин

OZON.RU



28930626

URSS.RU

или

—нете:

http://URSS.ru



9 785397 008846 >

Любые отзывы о настоящем издании, а также обнаруженные опечатки присылайте по адресу URSS@URSS.ru. Ваши замечания и предложения будут учтены и отражены на web-странице этой книги в нашем интернет-магазине <http://URSS.ru>